COURS

DE

CALCUL INFINITÉSIMAL.

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS,
Quai des Augustins, 55.



COURS

DE

CALCUL INFINITÉSIMAL,

PAR J. HOÜEL,

Professeur de Mathématiques pures à la Faculté des Sciences de Bordeaux.

TOME DEUXIÈME.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

1879

COURS
DE
CALCUL INFINITÉSIMAL.

LIVRE TROISIÈME.

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DU CALCUL INFINITÉSIMAL.

CHAPITRE PREMIER.

APPLICATIONS DU CALCUL DIFFÉRENTIEL A LA GÉOMÉTRIE PLANE.

§ I.

TANGENTES ET NORMALES AUX COURBES PLANES.

504. Soit $M(x, y)$ un point d'une courbe donnée. L'équation d'une droite MP passant par ce point sera de la forme

$$A(\xi - x) + B(\eta - y) = 0.$$

Si l'on prend sur la courbe un autre point M', dont les coordonnées soient $x + h$, $y + k$, la distance de ce point à la droite MP sera, en supposant les coordonnées rectangulaires,

$$\delta = \frac{Ah + Bk}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Supposons maintenant h et k infiniment petits; on aura, en

désignant par ε une quantité infiniment petite en même temps que h,

$$k = (y' + \varepsilon) h,$$

et, par conséquent,

$$\delta = \frac{(A + By' + B\varepsilon) h}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Cette formule montre que, en général, δ est infiniment petit du premier ordre en même temps que h.

Mais, si l'on détermine le rapport $\frac{B}{A}$ de manière que l'on ait

$$A + By' = 0, \quad \text{d'où} \quad \frac{A}{B} = -y',$$

l'équation de la droite devenant

$$(1) \qquad \eta - y = y'(\xi - x),$$

δ sera alors un infiniment petit d'ordre supérieur au premier. L'équation (1) représente donc une droite déterminée, jouissant de la propriété que, dans le voisinage du point (x, y), cette droite s'approche infiniment plus de la courbe que toute autre droite menée par le même point. Cette droite s'appelle la *tangente* à la courbe au point (x, y).

503. Si l'on remplace y' par sa valeur indéfiniment approchée $\frac{dy}{dx}$, l'équation de la tangente prend la forme

$$\eta - y = \frac{dy}{dx}(\xi - x)$$

ou

$$(2) \qquad \frac{\xi - x}{dx} = \frac{\eta - y}{dy},$$

et sous cette forme elle représente rigoureusement une sécante rencontrant la courbe aux deux points (x, y) et $(x + dx, y + dy)$. Donc la tangente à une courbe au point (x, y) est la limite des sécantes qui rencontrent la courbe en ce point et en un point infiniment voisin.

En poussant plus loin le développement de $k = y'h + \frac{1}{2}(y'' + \varepsilon) h^2$, on a, pour l'expression de la distance M'P du point $(x + h, y + k)$

à la tangente,

$$\delta = \frac{\frac{1}{2}B(y'' + \varepsilon)h^2}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

ou, en mettant pour $\frac{A}{B}$ sa valeur, et négligeant un infiniment petit du troisième ordre,

$$\delta = \frac{\frac{1}{2}y''h^2}{\sqrt{y'^2 + 1}}.$$

Cette distance est donc un infiniment petit du second ordre, sauf dans le cas où y'' serait nul.

Remarquons que tous les calculs précédents s'appliqueraient au cas des coordonnées obliques, faisant entre elles un angle θ, si ce n'est qu'alors le dénominateur de δ serait

$$\frac{1}{\sin\theta}\sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta}, \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\sin\theta}\sqrt{1 + y'^2 + 2y'\cos\theta}.$$

506. Si l'équation de la courbe est donnée sous la forme

$$f(x, y) = 0,$$

on a alors

$$\frac{\partial f}{\partial x} + y'\frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

ou, aux infiniment petits près du second ordre,

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0.$$

Substituant, dans cette équation homogène, à dx et à dy les quantités proportionnelles $\xi - x$, $\eta - y$, en vertu de l'équation (2), on a, pour l'équation de la tangente en quantités finies,

$$(3) \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial f}{\partial y}(\eta - y) = 0.$$

507. La perpendiculaire à la tangente au point de contact, c'est-à-dire la *normale* à la courbe, a pour équation, en vertu des équations (2) et (3),

$$(4) \qquad (\xi - x)dx + (\eta - y)dy = 0,$$

ou

$$\frac{\xi - x}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{\eta - y}{\frac{\partial f}{\partial y}}.$$

On peut encore obtenir l'équation (4) en exprimant qu'un point quelconque de la normale est sur la limite de la perpendiculaire élevée au milieu de la corde qui joint les deux points (x, y) et $(x + dx, y + dy)$. On obtient cette condition en exprimant que la distance du point (ξ, η) au point (x, y) ne change pas, lorsqu'on y remplace x, y par $x + dx, y + dy$. En égalant donc les carrés des deux distances, on a

$$(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 = (\xi - x - dx)^2 + (\eta - y - dy)^2,$$

ou

$$d[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2] = 0,$$

la différentielle étant prise en faisant varier seulement x, y, et laissant ξ, η constants. En effectuant la différentiation, on retrouve l'équation (4).

Si les coordonnées sont obliques au lieu d'être rectangulaires, l'équation de la normale sera

$$d[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + 2(\xi - x)(\eta - y)\cos\theta] = 0,$$

c'est-à-dire

$$[\xi - x + (\eta - y)\cos\theta]\,dx + [(\xi - x)\cos\theta + \eta - y]\,dy = 0.$$

De cette équation et de la différentielle de l'équation de la courbe on tire

$$\frac{\xi - x + (\eta - y)\cos\theta}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{(\xi - x)\cos\theta + \eta - y}{\frac{\partial f}{\partial y}},$$

pour l'équation finie de la normale en coordonnées obliques.

508. Désignons par $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ la longueur de la corde infiniment petite qui joint les deux points

$$(x, y) \quad \text{et} \quad (x + dx, y + dy).$$

En appelant α, β les angles que fait cette corde avec les axes coordonnés, ces angles auront pour limites les angles que fait la tan-

gente avec les mêmes axes. On aura ainsi

$$dx = ds\cos\alpha, \quad dy = ds\cos\beta,$$

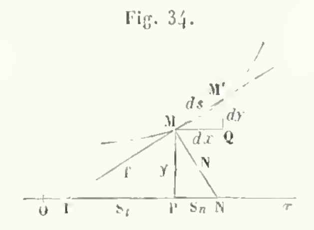
d'où

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \cos\beta = \frac{dy}{ds}.$$

Ces valeurs déterminent non-seulement la position de la tangente, mais encore le sens dans lequel on la parcourt en passant du point (x, y) au point $(x + dx, y + dy)$, ds étant considéré comme une longueur absolue.

509. On nomme *sous-tangente* à une courbe la distance TP (*fig.* 34) entre le pied de l'ordonnée et l'intersection de la tangente

Fig. 34.



avec l'axe des x; *sous-normale* la distance PN entre le pied de l'ordonnée et l'intersection de la normale avec l'axe des x; *tangente* et *normale* les longueurs comprises sur les droites de même nom entre la courbe et l'axe des x.

Chacun des triangles MTP, MPN est semblable au triangle infinitésimal MM'Q, qui a pour côtés ds, dx, dy. En désignant donc par S_t, S_n, T, N les longueurs ci-dessus, on aura la double proportion

$$T : S_t : y = N : y : S_n = ds : dx : dy,$$

d'où l'on tire les valeurs

$$S_t = y\frac{dx}{dy} = \frac{y}{y'}, \qquad S_n = y\frac{dy}{dx} = yy',$$

$$T = y\frac{ds}{dy} = \frac{y}{y'}\sqrt{1 + y'^2}, \quad N = y\frac{ds}{dx} = y\sqrt{1 + y'^2}.$$

510. On peut se proposer divers problèmes relatifs à ces lignes. Par exemple, on peut chercher quelles sont les courbes pour lesquelles l'une de ces lignes est constante.

I. Si la sous-tangente doit être constante, on a

$$y\frac{dx}{dy} = a, \quad \text{d'où} \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{a},$$

et, en intégrant,

$$\log\frac{y}{C} = \frac{x}{a}, \quad y = Ce^{\frac{x}{a}},$$

équation de la courbe logarithmique.

II. Si la sous-normale est constante, on a

$$y\frac{dy}{dx} = a, \quad y\,dy = a\,dx, \quad \text{d'où} \quad y^2 = 2ax + C,$$

équation d'une parabole ayant pour axe de figure l'axe des x.

III. Si la tangente est constante, on a

$$y\sqrt{1+\frac{1}{y'^2}} = a, \quad \frac{y}{y'} = \sqrt{a^2-y^2}, \quad dx = dy\sqrt{\frac{a^2}{y^2}-1}.$$

Posons

$$\frac{a}{y} = \operatorname{Ch}\varphi,$$

d'où

$$\sqrt{\frac{a^2}{y^2}-1} = \operatorname{Sh}\varphi, \quad \frac{dy}{y^2} = -\frac{\operatorname{Sh}\varphi}{a}\,d\varphi,$$

et, par suite,

$$dx = -a\operatorname{Th}^2\varphi\,.\,d\varphi = a\,d\varphi\left(\frac{1}{\operatorname{Ch}^2\varphi}-1\right),$$

d'où, en intégrant,

$$\frac{x-C}{a} = \operatorname{Th}\varphi - \varphi = \frac{\sqrt{a^2-y^2}}{a} - \log\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y},$$

équation de la tractoire.

IV. Enfin, si la normale est constante, on a

$$y\sqrt{1+y'^2} = a, \quad yy' = \sqrt{a^2-y^2}, \quad dx = \frac{y\,dy}{\sqrt{a^2-y^2}}, \quad x - C = -\sqrt{a^2-y^2},$$

ou enfin $(x-C)^2+y^2 = a^2$, équation d'un cercle dont le centre est sur l'axe des x.

511. La distance de l'origine des coordonnées à la tangente $\eta - y = y'(\xi - x)$ a pour expression

$$-\frac{y - xy'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{x\,dy - y\,dx}{ds} = \varpi.$$

La perpendiculaire abaissée de l'origine sur la tangente a pour équation

$$\xi\,dx + \eta\,dy = 0.$$

Combinant cette équation avec celle de la tangente, que l'on peut écrire sous la forme $\xi\,dy - \eta\,dx = x\,dy - y\,dx$, il vient

$$\frac{\xi}{dy} = \frac{\eta}{-dx} = \frac{\xi\,dy - \eta\,dx}{dy^2 + dx^2} = \frac{x\,dy - y\,dx}{ds^2},$$

d'où l'on tire

$$\xi = \varpi\frac{dy}{ds} \quad \text{et} \quad \eta = -\varpi\frac{dx}{ds}.$$

Le lieu des points (ξ, η) s'appelle la *podaire* de la courbe par rapport à l'origine.

Pour avoir la podaire par rapport à un point quelconque (a, b) du plan, on remplacera, dans le calcul précédent, ξ, η, x, y par $\xi - a, \eta - b, x - a, y - b$.

512. Mener une tangente à une courbe par un point extérieur à cette courbe.

Les coordonnées x, y du point de contact seront déterminées par la double condition de satisfaire à l'équation de la courbe

$$(1) \qquad f(x, y) = 0,$$

et à l'équation générale de la tangente

$$(2) \qquad f'(x)(\xi - x) + f'(y)(\eta - y) = 0,$$

où l'on prendra pour ξ, η les coordonnées du point donné par où doit passer la tangente. On peut considérer les équations (1) et (2) comme représentant deux lieux géométriques, à l'intersection desquels doit se trouver le point de contact cherché.

Lorsque l'équation (1) est algébrique, on peut simplifier en général le problème, en remplaçant la seconde équation (2) par une autre de degré moins élevé. Soit, en effet, m le degré de la fonc-

tion $f(x, y)$, supposée rationnelle et entière, et décomposons cette fonction en groupes homogènes $u_m, u_{m-1}, \ldots$, de degrés $m, m-1, \ldots$. L'équation (1) prendra la forme

$$(3) \qquad u_m + u_{m-1} + \ldots + u_1 + u_0 = 0.$$

On a, d'ailleurs, en appliquant à chaque groupe homogène le théorème d'Euler [322],

$$x f'(x) + y f'(y) = m u_m + (m-1) u_{m-1} + \ldots + 2u_2 + u_1,$$

ou, en combinant cette égalité avec l'équation (3) multipliée par $-m$,

$$x f'(x) + y f'(y) = - u_{m-1} - 2u_{m-2} - \ldots - (m-1) u_1 - m u_0.$$

Si l'on substitue cette valeur dans l'équation (2), celle-ci devient

$$(4) \quad \xi f'(x) + \eta f'(y) + u_{m-1} + 2u_{m-2} + \ldots + (m-1) u_1 + m u_0 = 0,$$

équation qui n'est plus que du degré $m-1$ en x, y. Donc les points de contact sont déterminés par la rencontre de la courbe donnée de degré m avec une autre courbe, représentée par l'équation (4), et de degré $m-1$. Le nombre des systèmes de racines communes aux équations (1) et (4) étant en général $m(m-1)$ [142], on en conclut que, par un point donné hors d'une courbe, on peut mener à cette courbe, en général, $m(m-1)$ tangentes, réelles ou imaginaires, m étant le degré de l'équation de la courbe.

Si l'on applique ces résultats à une courbe du second degré, représentée par l'équation

$$a x^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0,$$

on voit que les $2(2-1) = 2$ points de contact des tangentes menées par le point (ξ, η) sont donnés par la combinaison de l'équation de la courbe avec l'équation

$$\xi f'(x) + \eta f'(y) + 2dx + 2ey + 2f = 0,$$

qui est l'équation d'une droite, appelée *corde de contact*, laquelle coïncide avec la polaire du point (ξ, η).

513. L'équation de la normale,

$$\frac{\xi - x}{f'(x)} = \frac{\eta - y}{f'(y)},$$

n'est pas susceptible de la même simplification que celle de la tangente. On conclut de là que les pieds des normales menées à une courbe de degré m par un point donné sont déterminés par l'intersection de la courbe proposée avec une autre courbe de même degré m, ce qui donne généralement m^2 solutions. Donc, par un point donné, on peut mener à une courbe de degré m, m^2 normales, réelles ou imaginaires.

514. Soit proposé maintenant de mener une tangente (ou une normale) parallèle à une direction donnée. On cherchera pour cela les points de la courbe pour lesquels $\frac{dy}{dx}$ aura une valeur donnée α. En remplaçant y' par cette valeur dans l'équation

$$D_x f(x,y) = 0,$$

il vient

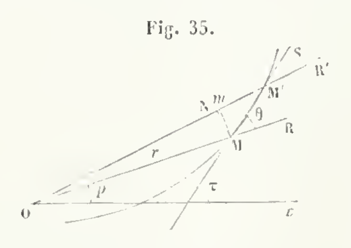
$$f'(x) + \alpha f'(y) = 0,$$

équation de degré $m-1$, si $f(x,y)$ est de degré m. Cette équation, combinée avec la proposée, déterminera $m(m-1)$ solutions, comme pour le cas de la tangente menée par un point donné [512].

515. Voyons maintenant comment on peut déterminer la tangente à des courbes rapportées à d'autres systèmes de coordonnées que le système rectiligne.

Considérons d'abord le cas des coordonnées polaires. Nous avons vu [194] que l'on détermine la tangente à une courbe rap-

Fig. 35.



portée à un tel système de coordonnées, au moyen de l'angle θ que fait la direction de la tangente, qui correspond au sens des angles p croissants, avec le prolongement du rayon vecteur. Cet angle est égal à la limite de l'angle M'MR (*fig.* 35) ou à celle de l'angle

SM′R′ = MM′N. Si l'on abaisse MN perpendiculaire sur OM′, on a, en posant la corde MM′ = ds,

$$M'N = ds \cos MM'N, \quad MN = ds \sin MM'N.$$

Or M′N = M′m + mN, si l'on prend Om = OM, et nous avons vu [194] que mN est un infiniment petit du second ordre. On a donc, aux quantités près du second ordre, M′N = dr. On a pareillement, avec la même approximation,

$$MN = r \sin dp = r dp \frac{\sin dp}{dp} = r dp.$$

Donc, en prenant au lieu de MM′N sa limite θ, on aura

$$dr = ds \cos\theta, \quad r dp = ds \sin\theta,$$

d'où l'on tire les formules

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 dp^2} = dp\sqrt{r^2 + r'^2},$$

$$\cos\theta = \frac{dr}{ds} = \frac{r'}{\sqrt{r^2 + r'^2}}, \quad \sin\theta = \frac{r dp}{ds} = \frac{r}{\sqrt{r^2 + r'^2}},$$

$$\tang\theta = \frac{r dp}{dr} = \frac{r}{r'}.$$

516. On peut encore obtenir $\tang\theta$ en partant de l'équation de la tangente en coordonnées rectangulaires. Si l'on désigne par τ l'angle de la tangente avec l'angle des x, on a $\theta = \tau - p$. D'ailleurs

$$\tang\tau = \frac{dy}{dx}, \quad \tang p = \frac{y}{x}.$$

Donc

$$\tang\theta = \frac{x dy - y dx}{x dx + y dy} = \frac{r\cos p\, d(r\sin p) - r\sin p\, d(r\cos p)}{\frac{1}{2} d(r^2)},$$

d'où l'on tire la même valeur que ci-dessus.

On bien encore

$$\cos\theta = \cos(\tau - p) = \frac{dx}{ds}\frac{x}{r} + \frac{dy}{ds}\frac{y}{r} = \frac{\frac{1}{2}d(r^2)}{r ds} = \frac{dr}{ds},$$

et de même pour $\sin\theta$.

517. Il est quelquefois avantageux d'introduire, au lieu du rayon

vecteur r, son inverse $u = \frac{1}{r}$. On a alors

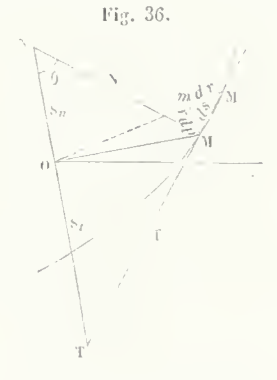
$$\frac{du}{u} = -\frac{dr}{r},$$

d'où

$$ds = \frac{1}{u^2}\sqrt{du^2 + u^2 dp^2} = \frac{dp}{u^2}\sqrt{u^2 + u'^2}, \quad \text{tang}\,\theta = -\frac{u\,dp}{du} = -\frac{u}{u'}.$$

518. Si l'on prolonge la tangente et la normale jusqu'à la rencontre, en T et en N (*fig.* 36), de la perpendiculaire TON au

Fig. 36.



rayon vecteur, les segments OT, ON de cette perpendiculaire sont dits la *sous-tangente* et la *sous-normale* dans le système des coordonnées polaires. Les distances MT, MN, comptées à partir du point de contact, sont appelées la *tangente* et la *normale*.

Chacun des triangles OMT, ONM étant semblable au triangle infinitésimal mMM′, qui a pour côtés ds, dr, $r\,dp$, on a les proportions

$$ds : dr : r\,dp = \mathrm{T} : r : \mathrm{S}_t = \mathrm{N} : \mathrm{S}_n : r,$$

d'où l'on tire

$$\mathrm{S}_t = \frac{r^2\,dp}{dr} = \frac{r^2}{r'} = r\,\text{tang}\,\theta = -\frac{1}{u'},$$

$$\mathrm{S}_n = \frac{dr}{dp} = r' = r\cot\theta = -\frac{u'}{u^2},$$

$$\mathrm{T} = \frac{r\,ds}{dr} = \frac{r}{r'}\sqrt{r^2 + r'^2} = \sqrt{r^2 + \mathrm{S}_t^2},$$

$$\mathrm{N} = \frac{ds}{dp} = \sqrt{r^2 + r'^2} = \sqrt{r^2 + \mathrm{S}_n^2}.$$

On peut se poser, relativement à ces lignes, les mêmes problèmes que pour les lignes analogues du système des coordonnées rectangulaires [510]. Si l'on cherche, par exemple, la courbe pour laquelle la *tangente* est constante, $T = a$, on trouve qu'elle est représentée par les deux équations

$$r = a\cos t, \quad p = \tang t - t,$$

si l'on détermine la constante arbitraire de manière que p s'annule en même temps que t.

519. Le lieu des extrémités T de la sous-tangente est donné par les équations

$$R = S_t, \quad P = p - \frac{\pi}{2};$$

celui des extrémités N de la sous-normale, par les équations

$$R = S_n, \quad P = p + \frac{\pi}{2}.$$

La perpendiculaire g, abaissée de l'origine sur la tangente, a pour expression

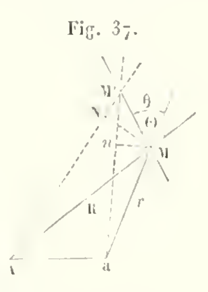
$$g = r\sin\theta = \frac{r^2 dp}{ds}.$$

La perpendiculaire abaissée de l'origine sur la normale, laquelle est égale à la distance entre le point de contact et la projection de l'origine sur la tangente, a pour valeur

$$h = r\cos\theta = \frac{r dr}{ds}.$$

520. Supposons maintenant chaque point du plan déterminé

Fig. 37.



par ses distances r, R à deux points fixes a, A (*fig.* 37). Une re-

lation $f(r, R) = 0$ entre r et R sera l'équation d'une certaine courbe. La tangente à cette courbe sera déterminée, lorsqu'on connaîtra une relation entre les angles θ et Θ qu'elle fait avec les deux rayons vecteurs r et R. En abaissant du point M des perpendiculaires sur les deux rayons vecteurs du point M' infiniment voisin de M, et raisonnant comme dans le cas des coordonnées polaires ordinaires, les triangles infinitésimaux MM'n, MM'N donneront

$$ds = \frac{dr}{\cos\theta} = \frac{dR}{\cos\Theta}, \quad \text{d'où} \quad \frac{\cos\Theta}{\cos\theta} = \frac{dR}{dr},$$

équation qui détermine la direction de la tangente.

Exemples. — I. L'ellipse est représentée par l'équation

$$R + r = 2a,$$

d'où

$$\frac{dR}{dr} = -1, \quad \cos\Theta = -\cos\theta.$$

La tangente est donc bissectrice de l'angle supplémentaire de l'angle des rayons vecteurs.

II. L'équation de l'hyperbole $R - r = 2a$ donne

$$\frac{dR}{dr} = 1, \quad \cos\Theta = \cos\theta.$$

La tangente est bissectrice de l'angle des rayons vecteurs.

III. Le cercle peut être représenté par l'équation $\frac{R}{r} = a$, d'où l'on tire

$$\frac{\cos\Theta}{\cos\theta} = a.$$

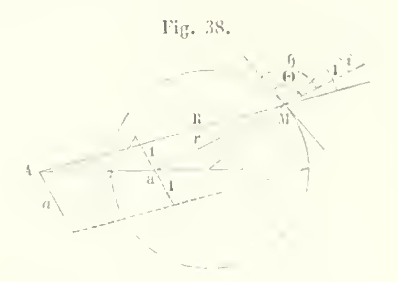
Les angles θ, Θ sont les compléments des angles i, I, que les deux rayons vecteurs forment avec la normale au cercle. On a donc entre ces derniers angles la relation

$$\frac{\sin I}{\sin i} = a.$$

On tire de là une construction simple pour représenter la loi de la réfraction de la lumière. Si a est l'indice de réfraction d'un

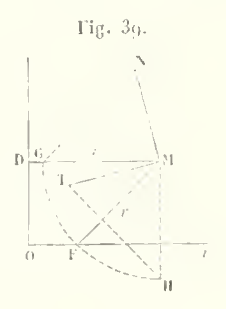
milieu, construisons, par le procédé connu, le cercle qui a pour équation $\frac{R}{r} = a$. Si l'on mène par le point A (*fig.* 38) une droite AM faisant avec la normale un angle I égal à l'angle d'incidence, la droite Ma fera avec cette normale un angle i égal à l'angle de réfraction, et AMa sera la déviation du rayon.

Fig. 38.



521. Si l'on prend pour coordonnées l'abscisse x et le rayon vecteur FM $= r$ (*fig.* 39) (ce qui revient à transporter à l'infini sur l'axe des x un des points fixes A, a du système du numéro précédent), en désignant toujours par θ et Θ les angles que fait la tangente avec le rayon vecteur et avec l'axe des x, on aura, comme précédemment,

Fig. 39.



$$ds = \frac{dr}{\cos\theta} = \frac{dx}{\cos\Theta}, \quad \text{d'où} \quad \frac{\cos\Theta}{\cos\theta} = \frac{dx}{dr}.$$

Soit, par exemple, $r = ax$ l'équation d'une section conique rapportée à son foyer et à sa directrice. On aura alors $\frac{\cos\theta}{\cos\Theta} = a$, ou, si l'on appelle i et I les angles de la normale avec r et avec x,

$\frac{\sin i}{\sin \mathrm{I}} = a = \frac{r}{x}$. Pour construire la normale, on prendra donc, sur MD, MG = MF = r; on mènera GN parallèle à FM et égale à MD = x; MN sera la normale cherchée. En menant MH perpendiculaire à x et = r, puis HT perpendiculaire à r et = x, MT sera la tangente.

322. Pour donner un exemple de l'emploi des coordonnées curvilignes, considérons deux coniques *homofocales*

$$(1)\qquad \frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - b^2} = 1,\quad \frac{x^2}{\mu^2} - \frac{y^2}{b^2 - \mu^2} = 1,$$

où l'on suppose $\lambda^2 > b^2 > \mu^2$. Ces deux courbes se coupent orthogonalement. En effet, les cosinus des angles que fait avec les axes la tangente à l'ellipse au point (x, y) sont proportionnels aux différentielles dx, dy, tirées de l'équation de cette courbe. De même, les cosinus des angles de la tangente à l'hyperbole avec les axes sont proportionnels aux différentielles $d'x$, $d'y$, tirées de l'équation de l'hyperbole. Or, des équations

$$\frac{x}{\lambda^2}\,dx = -\frac{y}{\lambda^2 - b^2}\,dy,\quad \frac{x}{\mu^2}\,d'x = \frac{y}{b^2 - \mu^2}\,d'y,$$

on tire, par multiplication,

$$\frac{x^2}{\lambda^2\mu^2}\,dx\,d'x = -\frac{y^2}{(\lambda^2 - b^2)(b^2 - \mu^2)}\,dy\,d'y.$$

Les équations (1) donnent, par soustraction,

$$(\lambda^2 - \mu^2)\left[\frac{x^2}{\lambda^2\mu^2} - \frac{y^2}{(\lambda^2 - b^2)(b^2 - \mu^2)}\right] = 0,$$

et, $\lambda^2 - \mu^2$ n'étant pas nul, la parenthèse s'évanouit, et, par suite, l'équation précédente devient

$$dx\,dx' + dy\,dy' = 0,$$

c'est-à-dire que les deux courbes se coupent à angles droits.

Si l'on résout les équations (1) par rapport à x et à y, on trouve

$$(2)\qquad x^2 = \frac{\lambda^2\mu^2}{b^2},\quad y^2 = \frac{(\lambda^2 - b^2)(b^2 - \mu^2)}{b^2}.$$

Réciproquement, pour avoir les demi-axes λ, μ des deux coni-

ques qui se coupent en un point (x, y), on verra, en résolvant les équations (1) par rapport à λ^2 et à μ^2, que ces deux quantités sont les racines de l'équation

$$\lambda^4 - (x^2 + y^2 - b^2)\lambda^2 + b^2 x^2 = 0,$$

lesquelles sont réelles et positives.

On conclut de là qu'un système de valeurs de λ et de μ détermine un point du plan, et que, réciproquement, à chaque point du plan correspond un système de valeurs de λ, μ. On peut donc prendre ces quantités λ, μ comme des coordonnées propres à déterminer tous les points du plan, et une relation entre λ et μ représentera une courbe.

On voit, en particulier, que $\lambda =$ const. représente une des ellipses homofocales, $\mu =$ const. une des hyperboles.

Si nous considérons l'ellipse $\lambda =$ const., on obtiendra les divers points de cette ellipse en faisant varier μ, ce qui donne, en vertu des équations (2),

$$b\, d_\mu x = \lambda\, d\mu, \quad b\, d_\mu y = -\mu\, d\mu \sqrt{\frac{\lambda^2 - b^2}{b^2 - \mu^2}}.$$

En désignant par $d_\mu s$ la corde infiniment petite de l'ellipse, on a donc [508]

$$d_\mu s = \sqrt{d_\mu x^2 + d_\mu y^2} = d\mu \sqrt{\frac{\lambda^2 - \mu^2}{b^2 - \mu^2}}.$$

On trouvera de même, pour la corde infiniment petite de l'hyperbole,

$$d_\lambda s = d\lambda \sqrt{\frac{\lambda^2 - \mu^2}{\lambda^2 - b^2}}.$$

Cela posé, soient M, M' (*fig.* 40) deux points infiniment voi-

Fig. 40.

sins, pris sur une courbe quelconque $f(\lambda, \mu) = 0$. Menons par

ces points les ellipses de demi-axes λ et $\lambda + d\lambda$, et les hyperboles de demi-axes μ et $\mu + d\mu$, ce qui formera le rectangle infinitésimal $MM_1M'M'_2$, dont les côtés sont $d_\mu s$, $d_\lambda s$, et la diagonale la corde infiniment petite ds de la courbe. En désignant, de plus, par θ l'angle de la tangente à la courbe avec la tangente à l'ellipse, ou la limite de l'angle de ds avec $d_\mu s$, on aura

$$ds^2 = d_\mu s^2 + d_\lambda s^2 = (\lambda^2 - \mu^2)\left(\frac{d\lambda^2}{\lambda^2 - b^2} + \frac{d\mu^2}{b^2 - \mu^2}\right),$$

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{d_\lambda s}{d_\mu s} = \frac{d\lambda}{d\mu}\sqrt{\frac{b^2 - \mu^2}{\lambda^2 - \mu^2}},$$

$$\sin\theta = \frac{d_\lambda s}{ds} = \frac{d\lambda}{ds}\sqrt{\frac{\lambda^2 - \mu^2}{\lambda^2 - b^2}}, \quad \cos\theta = \frac{d_\mu s}{ds} = \frac{d\mu}{ds}\sqrt{\frac{\lambda^2 - \mu^2}{b^2 - \mu^2}}.$$

§ II.

ASYMPTOTES RECTILIGNES DES COURBES PLANES.

523. On entend par *asymptote rectiligne* d'une courbe donnée une droite dont une branche infinie de la courbe s'approche indéfiniment. Supposons d'abord la courbe rapportée à des coordonnées rectilignes.

Évidemment il est indifférent, dans ce cas, de compter la distance d'un point de la courbe à l'asymptote suivant une perpendiculaire ou suivant une oblique à cette asymptote, pourvu que ce soit suivant une direction faisant avec l'asymptote un angle *fini* et différent de zéro. On peut donc compter cette distance suivant une parallèle à l'axe des y, toutes les fois que l'asymptote elle-même ne sera pas parallèle à cet axe.

On est ainsi conduit à distinguer deux cas dans la recherche des asymptotes : celui où l'on cherche les asymptotes parallèles à l'axe des y, et celui où l'on cherche les asymptotes non parallèles à cette direction.

Remarquons que l'on pourrait ramener le premier cas au second, en échangeant entre eux les axes des x et des y. Et réciproquement, toutes les fois qu'il ne s'agit pas d'asymptotes parallèles à l'axe des x, on pourrait ramener le second cas au premier, en cherchant, par une transformation de coordonnées, quelle direc-

tion il faudrait donner à l'axe des y pour que la courbe admît des asymptotes parallèles à cet axe.

524. *Asymptotes parallèles à l'axe des y.* — Supposons que le premier membre de l'équation de la courbe se présente sous la forme d'une série, composée d'un nombre fini ou infini de termes, et ordonnée suivant les puissances décroissantes de y; et, de plus, qu'aucun des coefficients de ce développement ne devienne infini pour les valeurs particulières de x que nous aurons à considérer. Ce cas comprend évidemment celui des courbes algébriques dont on a ramené l'équation à la forme entière et rationnelle. Soit donc

$$y^l f_1(x) + y^m f_2(x) + \ldots = 0$$

l'équation proposée, $l, m, \ldots$ étant des nombres, entiers ou non, positifs ou négatifs, mais *algébriquement décroissants*, de sorte que l'on ait $l > m > \ldots$. Il faut chercher si l'équation peut être vérifiée en attribuant à la fois une valeur finie à x et une valeur infinie à y.

Divisons le premier membre de l'équation par la plus haute puissance de y, ce qui donne

$$f_1(x) + \frac{1}{y^{l-m}} f_2(x) + \ldots = 0.$$

Il est clair que cette équation, dont tous les termes, à l'exception du premier, sont multipliés par des puissances négatives de y, sera vérifiée, en donnant, d'une part, à x une valeur qui annule le premier terme $f_1(x)$ sans rendre les coefficients suivants $f_2(x), \ldots$ infinis, et, d'autre part, à y une valeur infinie. On obtiendra donc les abscisses auxquelles correspondent des asymptotes parallèles aux y, en égalant à zéro le coefficient de la plus haute puissance de y.

Étant donnée, par exemple, l'équation du second degré

$$ax^2 + bxy + cx + dy + e = 0,$$

on aura l'asymptote parallèle à l'axe des y, en déterminant x par l'équation $bx + d = 0$.

Remarquons que, pour qu'une racine de l'équation $f_1(x) = 0$

corresponde à une asymptote réelle de la courbe, il faut que la courbe ait une branche réelle dans le voisinage de cette asymptote. Ainsi, la courbe $x^2y^2 - ax + b^2 = 0$ n'ayant pas de points réels pour x très-peu différent de zéro, on ne peut pas dire que l'équation $x^2 = 0$ détermine des asymptotes de cette courbe. Cette remarque s'étend aussi aux autres cas de détermination des asymptotes.

525. *Asymptotes parallèles à l'axe des x.* — On verra, absolument de la même manière, que les asymptotes parallèles à l'axe des x peuvent s'obtenir en ordonnant l'équation de la courbe suivant les puissances descendantes de x, et égalant à zéro le coefficient de la plus haute puissance de cette variable. — On peut, d'ailleurs, faire rentrer la recherche des asymptotes parallèles à l'axe des x dans le cas plus général qu'il nous reste à traiter.

526. *Asymptotes non parallèles à l'axe des y.* — Nous allons traiter cette question dans la supposition que le premier membre de l'équation de la courbe soit ordonné en une série, finie ou infinie, de groupes homogènes par rapport à x et à y, dont les degrés forment une suite *décroissante*.

L'équation peut se mettre immédiatement sous cette forme, toutes les fois que son premier membre est une fonction algébrique, entière et rationnelle, de x et de y, ou plus généralement, de puissances quelconques x^λ, y^μ de ces variables. Pour l'y ramener, s'il est possible, dans les autres cas, posons, dans l'équation $F(x, y) = 0$, $y = tx$, et développons la fonction $F(x, tx)$ suivant les puissances descendantes de x. On obtiendra ainsi un développement de la forme

$$x^l\varphi(t) + x^m\chi(t) + x^n\psi(t) + \ldots = 0,$$

$l, m, n, \ldots$ étant des nombres algébriquement décroissants; et en mettant pour t sa valeur $\frac{y}{x}$, l'équation devient

$$(1) \qquad x^l\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + x^m\chi\left(\frac{y}{x}\right) + x^n\psi\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots = 0.$$

Pour qu'une droite, représentée par l'équation

$$y = ax + b,$$

soit asymptote de la courbe, il faut que la différence

$$y - ax - b = \varepsilon,$$

entre l'ordonnée y de la courbe et l'ordonnée $ax + b$ de la droite, soit infiniment petite pour x infiniment grand. Or on a, en résolvant la dernière équation par rapport au coefficient angulaire a,

$$a = \frac{y}{x} - \frac{b + \varepsilon}{x},$$

et puisque $b + \varepsilon$ doit avoir une limite finie b pour $x = \infty$, on en conclut

$$a = \lim_{x=\infty} \frac{y}{x}.$$

On a ensuite, en mettant pour a la valeur constante ainsi déterminée,

$$b = y - ax - \varepsilon = \lim_{x=\infty} (y - ax).$$

527. Si l'on divise l'équation (1) par la plus haute puissance de x, on a

$$(2) \qquad \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{x^{l-m}} \chi\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots = 0.$$

Cette équation sera satisfaite, si l'on suppose à la fois x infini et $\lim \frac{y}{x}$ égal à l'une des racines de l'équation

$$(3) \qquad \varphi(a) = 0,$$

que l'on obtient en égalant à zéro l'ensemble des termes du degré le plus élevé, dans lesquels on fait $x = 1$, $y = a$.

On suppose ici que l'on a préparé l'équation de telle manière qu'aucune des fonctions $\chi(a)$, $\psi(a)$, ... ne devienne infinie, lorsqu'on prend pour a une des racines de l'équation (3).

528. Pour déterminer maintenant l'ordonnée à l'origine b de l'asymptote, posons $y - ax = \beta$, d'où $\frac{y}{x} = a + \frac{\beta}{x}$, et considérons d'abord le cas où a est une racine *simple* de l'équation (3). On aura, à cause de $\varphi(a) = 0$,

$$\varphi\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{\beta}{x} \varphi'\left(a + \theta \frac{\beta}{x}\right), \quad \chi\left(\frac{y}{x}\right) = \chi\left(a + \frac{\beta}{x}\right), \ldots$$

D'après cela, l'équation (2), multipliée par x, peut s'écrire sous la forme

$$(4) \qquad \beta\varphi'\left(a+\theta\frac{\beta}{x}\right)+\frac{1}{x^{l-m-1}}\chi\left(a+\frac{\beta}{x}\right)+\ldots=0.$$

Si la différence $l-m$ entre les degrés des deux premiers groupes de l'équation (1) est plus grande que l'unité, cette équation devient, pour $x=\infty$, $b=\lim\beta$,

$$b\varphi'(a)=0,$$

et, $\varphi'(a)$ n'étant pas nul, on a $b=0$. Donc, dans ce cas, toutes les asymptotes de la courbe qui correspondent à des racines simples de (3) passent par l'origine.

Si $l-m=1$, il vient alors

$$b=-\frac{\chi(a)}{\varphi'(a)}.$$

Si $l-m<1$, avec $\chi(a)$ différent de zéro, l'équation, contenant un terme affecté de la puissance positive x^{-l+m+1} de x, donnera, pour $x=\infty$, $b=\infty$, et par conséquent il n'y aura pas d'asymptote pour cette direction. Tel est le cas que présente la courbe

$$x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}=k^{\frac{1}{2}}.$$

Mais si $\chi(a)=0$, et que $\omega(a)$ soit la première des fonctions $\chi(a)$, $\psi(a)$, ..., qui ne s'annule pas pour la valeur considérée de a, l'équation deviendra

$$\beta\varphi'\left(a+\theta\frac{\beta}{x}\right)+\frac{1}{x^{l-m}}\chi'\left(a+\theta_1\frac{\beta}{x}\right)+\cdots+\frac{1}{x^{l-p-1}}\omega\left(a+\frac{\beta}{x}\right)+\ldots=0,$$

et l'on en conclura $b=0,\ -\dfrac{\omega(a)}{\varphi'(a)},\ \infty$, suivant que $l-p$ sera >1, $=1$, ou <1.

529. Supposons maintenant que a soit une racine double de (3), $\varphi'(a)$ étant nul et $\varphi''(a)$ différent de zéro. En poussant alors jusqu'au troisième terme le développement de $\varphi\left(a+\dfrac{\beta}{x}\right)$, et multipliant l'équation (2) par x^2, il vient

$$\frac{1}{2}\beta^2\varphi''\left(a+\theta\frac{\beta}{x}\right)+\frac{1}{x^{l-m-2}}\chi\left(a+\frac{\beta}{x}\right)+\ldots=0.$$

Si $l - m > 2$, $\beta^2 = 0$, et la double asymptote, correspondante à la racine double de l'équation (3), passera par l'origine.

Si $l - m = 2$, on aura

$$b = \pm \sqrt{-\frac{2\chi(a)}{\varphi''(a)}}.$$

Si cette valeur est réelle, la courbe aura deux asymptotes distinctes, parallèles entre elles.

Si $l - m < 2$, sans que $\chi(a)$ soit nul, b est infini, et il n'y a pas d'asymptote pour cette valeur de a ; mais si $\chi(a) = 0$, en développant $\chi\left(a + \frac{\beta}{x}\right)$, l'équation devient

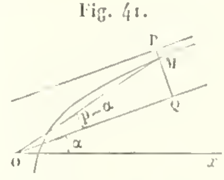
$$\frac{1}{2}\beta^2\varphi''\left(a + \theta\frac{\beta}{x}\right) + \frac{1}{x^{l-m-1}}\beta\chi'\left(a + \theta_1\frac{\beta}{x}\right) + \frac{1}{x^{l-n-2}}\psi\left(a + \frac{\beta}{x}\right) + \ldots = 0.$$

Si l'on a à la fois $l - m \geqq 1$, $l - n \geqq 2$, b sera donné par une équation du second degré. Si l'une des différences $l - m - 1$, $l - n - 2$ est négative, sans que $\chi'(a)$ et $\psi(a)$ s'annulent, il n'y a pas d'asymptote, et ainsi de suite.

On verra de la même manière que, si a est une racine triple de l'équation (3), la valeur de b, lorsqu'elle est finie, est donnée par une équation du troisième degré, et ainsi de suite.

530. *Asymptotes des courbes rapportées à des coordonnées polaires.* — Si une branche de courbe infinie a une asymptote rectiligne, alors, pour un point de cette branche infiniment éloigné, le rayon vecteur fera un angle infiniment petit avec l'asymptote, et sera infiniment grand ; donc on aura $r = \infty$ pour une valeur déterminée α de l'angle p, et cette valeur sera l'angle de l'asymptote avec l'axe des x. Par conséquent, on aura les directions qui peuvent correspondre à des asymptotes, en cherchant les valeurs α de l'angle p qui répondent à $r = \infty$.

Fig. 41.



Il faut, de plus, que la distance MQ (*fig.* 41) du point infini-

ment éloigné M, à la parallèle menée à l'asymptote par l'origine, tende vers une limite finie PQ, qui sera la distance de l'asymptote à l'origine. Cette distance $MQ = \delta$ a pour valeur $r \sin(p - \alpha)$. Il faudra donc chercher la limite d pour $p = \alpha$ et $r = \infty$ de l'expression $r \sin(p - \alpha) = r(p - \alpha) \dfrac{\sin(p - \alpha)}{(p - \alpha)}$, c'est-à-dire la quantité

$$d = \lim_{p=\alpha} r(p - \alpha).$$

531. Pour pouvoir traiter généralement la question, nous supposerons que l'équation entre r et p puisse être ordonnée suivant les puissances *décroissantes* de r en une série finie ou infinie, supposition qui revient à celle que nous avons admise [526] dans le cas des coordonnées rectilignes. Soit donc l'équation

$$r^l \varphi(p) + r^m \chi(p) + r^n \psi(p) + \ldots = 0,$$

où l'on suppose $l > m > n > \ldots$. De plus, nous admettons que, en multipliant par un facteur convenable, on ait fait en sorte que les coefficients $\chi(p)$, $\psi(p)$, ... ne deviennent infinis pour aucune des valeurs particulières de p que l'on aura à considérer.

En raisonnant comme nous l'avons fait [524] dans la recherche des asymptotes parallèles à l'axe des y, on voit que l'on obtiendra des valeurs $p = \alpha$, qui répondent aux valeurs infinies de r, en posant $\varphi(\alpha) = 0$.

Soit maintenant

$$p = \alpha + \varepsilon,$$

et cherchons la limite d de $r(p - \alpha) = r\varepsilon$. On a, en substituant à p sa valeur $\alpha + \varepsilon$, et divisant par r^{l-1},

$$d.\varphi'(\alpha + \theta\varepsilon) + \frac{1}{r^{l-m-1}} \chi(\alpha + \varepsilon) + \ldots = 0.$$

Cette équation, étant entièrement semblable à l'équation (4) du n° 528, donnera lieu à une discussion identique, sur laquelle il est inutile de revenir.

Exemple. — Soit l'équation d'une section conique

$$1 + e \cos p - \frac{k}{r} = 0.$$

On a ici

$$l = 0, \quad m = -1, \quad \varphi(p) = 1 + e\cos p.$$

L'équation $\varphi(\alpha) = 0$ donne $\cos\alpha = -\frac{1}{e}$, valeur inadmissible pour $e < 1$. On a ensuite

$$d = -\frac{\chi(\alpha)}{\varphi'(\alpha)} = \frac{k}{-e\sin\alpha} = \mp\frac{k}{\sqrt{e^2-1}},$$

valeur infinie pour $e = 1$, finie pour $e > 1$.

532. *Limite de la tangente en un point d'une branche infinie.* — Si la tangente à une branche de courbe tend vers une position limite déterminée, lorsque le point de contact s'éloigne indéfiniment, cette position limite sera, en général, une asymptote à la courbe. Nous allons le démontrer pour le cas où l'équation peut être ordonnée suivant les puissances décroissantes de y ou développée en série de groupes homogènes de degrés décroissants, comme nous l'avons fait pour traiter la théorie des asymptotes.

I. Supposons d'abord l'équation mise, comme au n° 524, sous la forme

$$y^l f_1(x) + y^m f_2(x) + \ldots = 0.$$

On tire de cette équation

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y\left[f_1'(x) + \frac{1}{y^{l-m}} f_2'(x) + \ldots\right]}{l f_1(x) + \frac{m}{y^{l-m}} f_2(x) + \ldots}.$$

Cette valeur devient infinie si l'on prend pour x une valeur x_1, pour laquelle on ait à la fois $f_1(x_1) = 0$, $y = \infty$, en supposant $f_1'(x_1)$ différent de zéro. Alors l'équation de la tangente

$$\xi - x = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}(\eta - y)$$

se réduit à $\xi = x_1$, et la tangente coïncide avec l'asymptote parallèle à l'axe des y, déterminée au n° 524.

On traiterait de même le cas où l'équation serait ordonnée suivant les puissances décroissantes de x.

533. II. Dans le cas d'une tangente limite non parallèle à l'axe des y, la règle de la recherche des vraies valeurs [381] donne, pour x et y infinis,

$$\lim \frac{dy}{dx} = \lim \frac{y}{x};$$

donc, lorsque $\frac{dy}{dx}$ tendra, pour x et y infinis, vers une limite déterminée, cette limite sera la même que celle de $\frac{y}{x}$, c'est-à-dire que le coefficient *angulaire de l'asymptote*.

Pour l'ordonnée à l'origine de la tangente, on a

$$\eta_0 = y - x\frac{dy}{dx};$$

mais, comme $\frac{dy}{dx}$ n'est jamais égal à sa limite a, mais en diffère d'un infiniment petit ε, on ne peut pas, sous cette forme générale, affirmer que $\lim \eta_0 = \lim[y - (a+\varepsilon)x]$ sera toujours égale à l'ordonnée à l'origine de l'asymptote, $\lim(y - ax)$. Nous verrons, en effet, qu'il peut exister, dans certains cas, une asymptote, sans que la tangente à la branche infinie tende vers une limite fixe.

Considérons le cas où l'équation peut se mettre sous la forme (1) du n° 526,

$$F(x, y) = x^l \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + x^m \chi\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots = 0.$$

On en tire

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x} &= l x^{l-1} \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + m x^{m-1} \chi\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots \\ &\quad - \frac{y}{x^2}\left[x^l \varphi'\left(\frac{y}{x}\right) + x^m \chi'\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots\right],\end{aligned}$$

ou, en retranchant du second membre le produit nul

$$\frac{l}{x} F(x, y) = l x^{l-1} \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + l x^{m-1} \chi\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -(l-m) x^{m-1} \chi\left(\frac{y}{x}\right) - \ldots - \frac{y}{x^2}\left[x^l \varphi'\left(\frac{y}{x}\right) + x^m \chi'\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots\right].$$

Ensuite

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{x}\left[x^l \varphi'\left(\frac{y}{x}\right) + x^m \chi'\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots\right];$$

donc

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}} = \frac{y}{x} - \frac{\dfrac{l-m}{x^{l-m}}\chi\left(\dfrac{y}{x}\right) + \ldots}{\varphi'\left(\dfrac{y}{x}\right) + \dfrac{1}{x^{l-m}}\chi'\left(\dfrac{y}{x}\right) + \ldots}.$$

Si donc $\frac{y}{x}$ tend vers une limite finie a, qui ne rende infinie aucune des fonctions $\chi(a)$, ..., et qui n'annule pas $\varphi'(a)$, $\frac{dy}{dx}$ tendra vers la même limite, d'où

$$\lim \frac{dy}{dx} = \lim \frac{y}{x} = a.$$

C'est ce qui aura lieu encore, si l'on a $\varphi'(a) = 0$, avec $\chi(a) = 0$ et $\chi'(a)$ différent de zéro, etc.

On a ensuite, pour l'ordonnée à l'origine de la tangente,

$$y - x\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{l-m}{x^{l-m-1}}\chi\left(\dfrac{y}{x}\right) + \ldots}{\varphi'\left(\dfrac{y}{x}\right) + \dfrac{1}{x^{l-m}}\chi'\left(\dfrac{y}{x}\right) + \ldots}.$$

Dans le cas où $\varphi'(a)$ ne sera pas nul, cette expression aura, comme l'ordonnée à l'origine de l'asymptote, pour limite

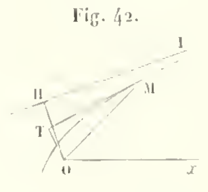
$$0, \quad -\frac{\chi(a)}{\varphi'(a)}, \quad \infty,$$

selon qu'on aura $l - m > 1$, $= 1$, < 1.

Les cas exceptionnels de cette formule donneraient lieu à une discussion analogue à celle que nous avons faite pour les asymptotes [528, 529].

534. Si la courbe est rapportée à des coordonnées polaires, et

Fig. 42.



que la tangente ait une limite fixe HI (*fig.* 42), la distance OH

de cette limite à l'origine sera la limite de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur la tangente, c'est-à-dire $\lim r\sin\theta$; ou encore ce sera la limite de la sous-tangente OT, c'est-à-dire $\lim r\tang\theta = \lim\frac{r^2}{r'}$.

On cherchera donc d'abord, comme dans la théorie des asymptotes, la valeur de p pour laquelle $r=\infty$. On examinera ensuite si $\frac{r^2}{r'}$ tend vers une limite finie, lorsque p approche de sa limite α. Or, en supposant, comme au n° 531, l'équation ordonnée suivant les puissances décroissantes de r, on trouvera, par une réduction analogue à celle du numéro précédent,

$$r' = \frac{r^l\varphi'(p) + r^m\chi'(p) + \ldots}{(l-m)r^{m-1}\chi(p) + \ldots},$$

d'où

$$S_t = \frac{r^2}{r'} = \frac{\frac{l-m}{r^{l-m-1}}\chi(p) + \ldots}{\varphi'(p) + \frac{1}{r^{l-m}}\chi'(p) + \ldots},$$

expression qui, en supposant $\varphi'(\alpha)$ différent de zéro, aura, pour $p=\alpha$, la même valeur limite que d [531].

535. On peut donc obtenir généralement les asymptotes, en cherchant les limites des tangentes à l'infini, quand ces limites existent.

Exemples. — I. Soit la courbe

$$y^2 = \cos\frac{y}{x}.$$

On a d'abord

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x\sin\frac{y}{x} - x^2y}{y\sin\frac{y}{x}}.$$

Or, pour $x=\infty$, y étant fini,

$$\lim\left(x\sin\frac{y}{x}\right) = \lim\left(y\frac{\sin\frac{y}{x}}{\frac{y}{x}}\right) = \lim y = \pm 1.$$

Donc $\lim \frac{dy}{dx} = 0$; ensuite

$$y - x\frac{dy}{dx} = y \cdot \frac{2x^2y}{2x^2y - x\sin\frac{y}{x}},$$

quantité qui a pour limite $\lim y = \pm 1$; donc la courbe a pour tangentes limites à l'infini les droites $y = +1$, $y = -1$, qui sont les asymptotes.

II. Soit la spirale hyperbolique $r = \frac{a}{p}$. On a $r = \infty$ pour $p = \alpha = 0$. Ensuite $r' = -\frac{a}{p^2}$, d'où $S_t = -a$; donc la sous-tangente a pour limite $-a$, ce qui détermine la tangente limite ou l'asymptote.

536. Il y a des cas où la courbe a une asymptote, sans que pour cela la tangente à l'infini tende vers une limite déterminée. Considérons, par exemple, la courbe qui a pour équation

$$y = \frac{a + \sin x}{x^m},$$

a étant > 1 et m positif. On a d'abord $y = 0$ pour x infini ; donc l'axe des x est une asymptote. Mais, si l'on cherche la limite de la tangente, on trouve bien que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{x^m} - \frac{m(a + \sin x)}{x^{m+1}}$$

a toujours pour limite zéro ; mais l'ordonnée à l'origine de la tangente

$$y - x\frac{dy}{dx} = \frac{(1-m)(a+\sin x)}{x^m} - \frac{\cos x}{x^{m-1}}$$

aura pour limite

$$-\lim \frac{\cos x}{x^{m-1}},$$

quantité nulle pour $m > 1$ (auquel cas la limite de la tangente est l'asymptote), indéterminée et oscillant entre -1 et $+1$ pour $m = 1$, oscillant entre $-\infty$ et $+\infty$ pour $m < 1$.

Pour nous rendre compte de cette circonstance, remarquons que,

dans les environs du point de contact, situé à une distance infiniment grande de l'origine, $\frac{dy}{dx}$ ayant pour limite $\lim \frac{y}{x}$, et le point de contact étant infiniment voisin de l'asymptote, la tangente, dans un intervalle fini à partir de ce point de contact, différera infiniment peu de l'asymptote. Mais, si l'on remonte jusqu'à l'axe des y, situé à une distance infiniment grande du point de contact, l'ordonnée de la tangente par rapport à l'asymptote sera le produit d'un coefficient angulaire infiniment petit par une abscisse infiniment grande. Or rien ne prouve donc que ce produit ait pour limite zéro, ni qu'il tende vers une limite déterminée.

§ III.

LONGUEUR D'UN ARC DE COURBE. — ANGLE DE CONTINGENCE. DÉTERMINATION DU SENS DE LA CONCAVITÉ D'UNE COURBE.

537. On sait, par la XX[e] proposition du I[er] Livre d'Euclide, que dans un triangle un côté quelconque est moindre que la somme des deux autres, d'où il résulte : 1° que la différence de deux côtés d'un triangle est moindre que le troisième côté; 2° qu'un côté quelconque d'un polygone fermé est moindre que la somme de tous les autres.

Si donc un triangle a un seul angle infiniment petit, la différence entre les côtés qui comprennent cet angle est moindre que le troisième côté, et, comme celui-ci est infiniment petit par rapport à chacun des deux autres, il s'ensuit que la différence des côtés qui comprennent l'angle infiniment petit est infiniment petite par rapport à chacun de ces deux côtés; ou, en d'autres termes, que les deux côtés d'un angle infiniment petit d'un triangle, dont les deux autres angles sont finis, diffèrent entre eux *infiniment peu*.

Si l'un des deux angles finis est droit, cette différence est même infiniment petite du second ordre par rapport à chacun de ces côtés; car, a, b, c étant les côtés d'un triangle rectangle,

$$a^2 - b^2 = c^2, \quad \text{d'où} \quad \frac{a-b}{a} = \frac{a}{a+b}\left(\frac{c}{a}\right)^2;$$

quantité infiniment petite du second ordre, si c est infiniment petit par rapport à a.

On en conclut que, si un triangle a deux de ses angles infiniment petits, la différence entre le plus grand côté et la somme des deux autres est infiniment petite du second ordre par rapport à ce plus grand côté.

Il en est de même pour la différence entre un côté d'un polygone et la somme de tous les autres, lorsque tous ceux-ci forment avec le premier des angles infiniment petits.

538. Soit donné un arc de courbe plane. Nous supposerons cet arc *convexe*, c'est-à-dire tel qu'un rayon vecteur, mené par un point fixe, parallèlement à chaque position de la tangente, tandis que le point de contact parcourt l'arc d'une extrémité à l'autre, se déplace en tournant toujours dans le même sens, sans jamais revenir en arrière.

Admettons, en outre, pour plus de simplicité, que l'arc soit tel que l'angle des deux positions extrêmes du rayon parallèle à la tangente soit moindre que deux angles droits, de sorte que les tangentes extrêmes et la corde de l'arc forment un triangle contenant l'arc dans son intérieur.

Si ces conditions n'étaient pas remplies, on partagerait l'arc en portions pour lesquelles les deux conditions eussent lieu.

Si à cet arc AB on inscrit et l'on circonscrit deux polygones quelconques, les longueurs des périmètres de ces polygones seront toujours comprises entre celle de la corde AB et la somme AT + TB des tangentes extrêmes. Donc ces périmètres auront toujours des longueurs finies, quels que soient les nombres de leurs côtés.

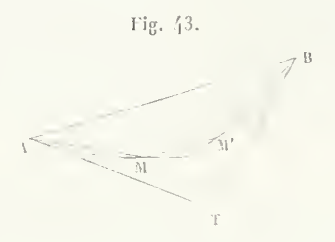
Si l'on subdivise les arcs, en introduisant de nouveaux sommets et de nouveaux points de contact, le périmètre du polygone inscrit augmente, celui du polygone circonscrit diminue, et, de plus, le périmètre du polygone inscrit est toujours moindre que celui du polygone circonscrit.

Soit maintenant AM (*fig.* 43) un arc infiniment petit. La corde AM fera un angle infiniment petit avec la tangente en un point quelconque de l'arc AM, ainsi qu'avec toute corde sous-tendant une portion quelconque de l'arc AM. Il résulte de là : 1° que la corde infiniment petite AM diffère infiniment peu de toute portion de polygone infinitésimal circonscrit à la courbe, comprise entre les ordonnées des extrémités A et M; 2° que cette

corde diffère infiniment peu de toute ligne polygonale inscrite dans l'arc AM.

Il s'ensuit de là que la somme des cordes infiniment petites, ou le périmètre d'un polygone inscrit, dont tous les côtés sont infiniment petits, diffère infiniment peu du périmètre d'un polygone

Fig. 43.



infinitésimal circonscrit au même arc fini AB. Si donc on multiplie indéfiniment le nombre des côtés des deux polygones, les deux périmètres, l'un croissant, l'autre décroissant, et différant l'un de l'autre infiniment peu, tendront vers une limite commune, plus grande que chacun des polygones inscrits, plus petite que chacun des polygones circonscrits.

On verrait, d'ailleurs, par un raisonnement tout pareil à celui du n° 237, que cette limite est indépendante du mode de subdivision de l'arc en parties infiniment petites par les sommets du polygone inscrit ou les points de contact du polygone circonscrit.

Cette limite commune des périmètres des polygones inscrits et circonscrits à un arc de courbe est ce qu'on nomme la *longueur* de l'arc de courbe.

Cette limite jouit de toutes les propriétés des polygones inscrits et circonscrits, indépendantes du nombre des côtés.

539. Si l'on considère un arc infiniment petit, compris entre les points (x, y) et $(x+dx, y+dy)$, sa corde $ds = \sqrt{dx^2+dy^2}$ différera infiniment peu d'un polygone quelconque, inscrit ou circonscrit à cet arc. Elle différera donc aussi infiniment peu de la longueur de l'arc; donc on peut, aux infiniment petits près d'ordre supérieur au premier, prendre la corde ds pour la longueur même de l'arc infiniment petit, et la longueur d'un arc fini sera égale à la limite de la somme de ces éléments infiniment petits ds.

Ainsi la longueur d'un arc de courbe dont les extrémités ont

pour abscisses x_0 et X sera exprimée par l'intégrale

$$s = \int_{x=x_0}^{x=X} ds = \int_{x_0}^{X} \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_{x_0}^{X} dx \sqrt{1 + y'^2}.$$

Remarquons, de plus, que la différence entre la corde et un quelconque des polygones inscrits ou circonscrits à l'arc infinitésimal, est infiniment petite du second ordre *par rapport à la corde;* elle est donc, absolument parlant, du troisième ordre. Donc un arc infiniment petit diffère de sa corde d'un infiniment petit du troisième ordre.

540. Le calcul de l'intégrale qui exprime la longueur d'un arc de courbe constitue le problème de la *rectification* de cette courbe. Donnons-en quelques exemples.

I. Soit la parabole cubique

$$y^2 = x^3.$$

On a

$$2y\,dy = 3x^2\,dx,$$

d'où

$$ds^2 = dx^2 + \frac{9x^4}{4y^2}\,dx^2 = \left(1 + \frac{9}{4}x\right)dx^2,$$

$$s = \int dx \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} = \frac{8}{27}\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}} + C,$$

la constante arbitraire dépendant de l'origine à partir de laquelle on mesure l'arc.

II. Soit la cycloïde représentée par les équations

$$x = a(t + \sin t), \quad y = a(1 - \cos t).$$

On a

$$dx = a\,dt(1 + \cos t), \quad dy = a \sin t\,dt,$$

d'où

$$dy^2 = a^2(1 - \cos t)(1 + \cos t)\,dt^2 = ay(1 + \cos t)\,dt^2,$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = a^2 dt^2[(1 + \cos t)^2 + \sin^2 t] = 2a^2 dt^2(1 + \cos t) = \frac{2a}{y}\,dy^2,$$

et par suite, en comptant l'arc à partir du sommet de la courbe,

$$s = \int_0^y \frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{y}}\,dy = \sqrt{8ay}.$$

III. L'équation de la spirale d'Archimède étant $r = ap$, on en tire $dr = a\,dp$, et par suite [515]

$$ds^2 = dr^2 + r^2\,dp^2 = a^2\,dp^2(1+p^2), \quad \text{d'où} \quad s = a\int dp\sqrt{1+p^2}.$$

Si l'on pose $p = \operatorname{Sh}\varphi$, il vient

$$s = a\int \operatorname{Ch}^2\varphi\,d\varphi = \frac{1}{2}a\int(1+\operatorname{Ch}2\varphi)\,d\varphi = \frac{1}{2}a\left(\varphi + \frac{1}{2}\operatorname{Sh}2\varphi\right) + C,$$

ou enfin, en comptant l'arc s à partir de l'origine, ce qui donne $C = 0$,

$$s = \frac{1}{2}a\left[\log\left(p + \sqrt{1+p^2}\right) + p\sqrt{1+p^2}\right].$$

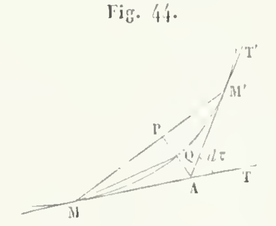
541. Soient $M(x, y)$, $M'(x+h, y_1)$ deux points infiniment voisins, pris sur une courbe $y = f(x)$. Désignons, sans distinction, par ε toute quantité qui devient infiniment petite en même temps que h. On aura, en poussant plus ou moins loin le développement par la série de Taylor,

$$\frac{y_1 - y}{h} = y' + \varepsilon = y' + \frac{h}{2}(y'' + \varepsilon),$$

$$y' = f'(x), \quad y'_1 = f'(x+h) = y' + \varepsilon = y' + h(y'' + \varepsilon).$$

Ayant ainsi les tangentes des angles $M'Mx$, TMx, $T'M'x$ (*fig.* 44),

Fig. 44.



on en tire, pour les tangentes des différences de ces angles deux à deux,

$$\operatorname{tang} M'MT = \frac{\frac{1}{2}h(y''+\varepsilon)}{1 + y'(y'+\varepsilon)} = \frac{1}{2}\frac{hy''}{1+y'^2}(1+\varepsilon),$$

$$\operatorname{tang} MM'A = \frac{\frac{1}{2}h(y''+\varepsilon)}{1 + (y'+\varepsilon)(y'+\varepsilon)} = \frac{1}{2}\frac{hy''}{1+y'^2}(1+\varepsilon),$$

$$\operatorname{tang} T'AT = \frac{h(y''+\varepsilon)}{1 + y'(y'+\varepsilon)} = \frac{hy''}{1+y'^2}(1+\varepsilon).$$

On a donc, à des infiniment petits du second ordre près,

$$M'MA = MM'A = \frac{1}{2}T'AT.$$

L'angle M'AT de deux tangentes infiniment voisines s'appelle l'*angle de contingence*. On peut le considérer comme égal à sa tangente, et il vient, en désignant cet angle par $d\tau$,

$$d\tau = \frac{hy''}{1+y'^2}(1+\varepsilon).$$

C'est ce que l'on aurait pu obtenir directement, en différentiant l'équation

$$\tau = \text{arc tang}\, y'.$$

On voit, en même temps, que le triangle AMM' est isoscèle, de sorte que les tangentes issues d'un point infiniment voisin de la courbe sont égales (aux infiniment petits près d'ordre supérieur au premier).

L'angle M'MT de la corde avec la tangente est égal à la moitié de l'angle de contingence correspondant à l'arc sous-tendu par cette corde.

Le rapport $\frac{y_1-y}{h}$ étant infiniment peu différent de y', on peut écrire, en remplaçant h par dx, y_1-y par dy,

$$\text{tang}\,T'AT = \text{tang}\,d\tau = \frac{hy''}{1+\left(\frac{y_1-y}{h}\right)^2}(1+\varepsilon) = \frac{h^3y''(1+\varepsilon)}{dx^2+dy^2} = \frac{y''dx^3}{MM'^2}(1+\varepsilon),$$

c'est-à-dire

$$d\tau = \frac{y''dx^3}{ds^2}(1+\varepsilon).$$

342. On a ensuite, pour la distance du point A à la corde,

$$AP = \frac{1}{2}MM'\,\text{tang}\,TMM' = \frac{ds}{2}\frac{d\tau}{2}(1+\varepsilon) = \frac{1}{4}ds\,d\tau,$$

aux infiniment petits près du troisième ordre, c'est-à-dire

$$AP = \frac{1}{4}\frac{y''dx^3}{ds}.$$

L'aire du triangle des deux tangentes est

$$\mathrm{AMM'} = \frac{1}{2}\,\mathrm{MM'}.\mathrm{AP} = \frac{1}{8}\,ds^2\,d\tau = \frac{1}{8}\,y''\,dx^3.$$

La flèche $\mathrm{PQ} = \frac{1}{2}\,\mathrm{MM'}\,\mathrm{tang\,QMM'}$. Or le point Q correspond à une abscisse égale à $x + \frac{1}{2}h$, aux infiniment petits près de l'ordre de PA, c'est-à-dire aux infiniment petits près du second ordre. On a donc, h différant infiniment peu de h',

$$\mathrm{tang\,QM}x = \frac{f\left(x + \frac{1}{2}h'\right) - f(x)}{\frac{1}{2}h'} = y' + \varepsilon = y' + \frac{h}{4}(y'' + \varepsilon).$$

Donc

$$\mathrm{tang\,QMM'} = \mathrm{tang}(\mathrm{M'M}x - \mathrm{QM}x) = \frac{1}{4}\,\frac{h y''(1+\varepsilon)}{1 + y'^2} = \frac{1}{4}\,d\tau,$$

d'où

$$\mathrm{PQ} = \frac{1}{8}\,ds\,d\tau = \mathrm{QA} = \frac{1}{2}\,\mathrm{AP},$$

comme cela a lieu pour la flèche d'un arc fini de parabole, menée parallèlement à l'axe.

543. Soit $\mu(x + \xi, y + \eta)$ un point de l'arc MM'. On aura

$$\eta = y'\xi + \frac{1}{2}(y'' + \varepsilon)\xi^2,$$

quantité qui ne diffère que d'un infiniment petit du troisième ordre de l'ordonnée d'une parabole ayant son axe parallèle à l'axe des y. L'élément d'aire du segment MAM' diffère donc infiniment peu de l'élément d'aire $\left(y'\xi + \frac{1}{2}y''\xi^2\right)d\xi$ de cette parabole ; donc, d'après une propriété connue de la parabole, l'aire du segment MQM' est les $\frac{2}{3}$ du triangle MAM', et a pour valeur $\frac{1}{12}y''\,dx^3$.

544. La différence

$$\mathrm{MA} - \mathrm{MP} = \frac{\mathrm{MP}}{\cos \mathrm{M'MA}}(1 - \cos \mathrm{M'MA}) = \frac{\frac{1}{2}ds}{\cos\frac{1}{2}d\tau}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{d\tau}{2}\right)^2 = \frac{1}{16}\,ds\,d\tau^2 ;$$

donc la différence entre la somme des tangentes et la corde

$$\text{MAM}' - \text{MPM}' = \frac{1}{8} ds\, d\tau^2$$

est du troisième ordre, et il en est de même, à plus forte raison, de la différence entre l'arc et la corde.

On peut d'ailleurs calculer cette différence directement. On a, aux infiniment petits près du quatrième ordre,

$$\begin{aligned}
\text{arc}\,\text{MM}' &= \int_0^h \sqrt{d\xi^2 + d\zeta^2} = \int_0^h d\xi \sqrt{1 + \left(y' + y''\xi + \frac{1}{2} y'''\xi^2\right)^2} \\
&= \sqrt{1+y'^2} \int_0^h d\xi \sqrt{1 + \frac{2y'y''\xi + (y'y''' + y''^2)\xi^2}{1+y'^2}} \\
&= \sqrt{1+y'^2} \int_0^h d\xi \left[1 + \frac{2y'y''\xi + (y'y''' + y''^2)\xi^2}{2(1+y'^2)} - \frac{y'^2y''^2\xi^2}{2(1+y'^2)^2}\right] \\
&= h\sqrt{1+y'^2}\left[1 + \frac{y'y''h}{2(1+y'^2)} + \frac{y'y'''(1+y'^2) + y''^2}{6(1+y'^2)^2} h^2\right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{corde}\,\text{MM}' &= \sqrt{h^2 + (y_1 - y)^2} = h\sqrt{1 + \left(y' + \frac{1}{2} y''h + \frac{1}{6} y'''h^2\right)^2} \\
&= h\sqrt{1+y'^2}\left[1 + \frac{y'y''h}{2(1+y'^2)} + \frac{\left(\frac{1}{6}y'y''' + \frac{1}{8}y''^2\right)h^2}{1+y'^2} - \frac{y'^2y''^2h^2}{8(1+y'^2)^2}\right].
\end{aligned}$$

En prenant la différence entre ces deux valeurs, on a

$$\text{arc} - \text{corde} = \frac{1}{24} h^3 \sqrt{1+y'^2}\left(\frac{y''}{1+y'^2}\right)^2 = \frac{1}{24} ds\, d\tau^2;$$

donc la différence entre l'arc et la corde est le tiers de la différence entre la corde et la somme des tangentes menées à ses extrémités.

545. Soit $\text{M}''(x+h+h_1, y_2)$ (*fig.* 45) un nouveau point de la courbe. Si l'on mène la corde M′M″, on aura

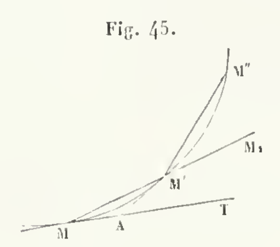
$$\begin{aligned}
\text{tang}\,\text{M}''\text{M}'x &= \frac{f(x+h+h_1) - f(x+h)}{h_1} = f'(x+h) + \varepsilon = y' + \varepsilon \\
&= f'(x+h) + \frac{h_1}{2}[f''(x) + \varepsilon] = f'(x) + \frac{2h+h_1}{2}(y'' + \varepsilon),
\end{aligned}$$

d'où

$$\operatorname{tang} M''M'M_1 = \frac{\frac{h+h_1}{2}(y''+\varepsilon)}{1+y'^2+\varepsilon} = \frac{h+h_1}{2}\cdot\frac{y''}{1+y'^2}(1+\varepsilon),$$

quantité égale à tang M'AT, lorsque h_1 est égal à h, ou infiniment peu différent de h, comme cela arrive lorsque la différentielle de x

Fig. 45.



est constante, ou qu'elle correspond à un accroissement constant d'une variable dont x est une fonction continue. Donc, lorsque h est constant ou varie d'une manière continue, l'angle de deux cordes consécutives, infiniment peu différentes entre elles, est égal à l'angle de contingence.

Autrement, on a

$$d\frac{y_1-y}{h} = d(y'+\varepsilon),$$

d'où

$$d\operatorname{arc\,tang}\frac{y_1-y}{h} = \frac{d(y'+\varepsilon)}{1+(y'+\varepsilon)^2} = (1+\varepsilon)\,d\operatorname{arc\,tang} y',$$

c'est-à-dire $= (1+\varepsilon)\,d\tau$.

546. *Sens de la concavité d'une courbe.* — Une courbe est dite *concave vers le haut* (ou *convexe vers le bas*), lorsque, dans le voisinage du point considéré, elle est située *au-dessus* de la tangente en ce point. Elle est dite, au contraire, *concave vers le bas* (ou *convexe vers le haut*), lorsqu'elle est située *au-dessous* de la tangente.

La courbe sera concave vers le haut si, pour une abscisse $x+h$ infiniment voisine de l'abscisse x du point de contact, l'ordonnée Y de la courbe est algébriquement plus grande que l'ordonnée η de

la tangente. Or on a, pour l'abscisse $x + h$,

$$\eta = y + hy', \quad Y = y + hy' + \frac{h^2}{2}(y'' + \varepsilon),$$

d'où l'on tire

$$Y - \eta = \frac{h^2}{2}(y'' + \varepsilon),$$

quantité qui, pour h assez petit et y'' différent de zéro, sera de même signe que y''; donc, pour $y'' > 0$, la courbe est concave vers le haut. Au contraire, pour $y'' < 0$, la courbe sera concave vers le bas.

347. On peut estimer de la même manière le sens de la concavité par rapport à la direction des abscisses positives. Si

$$\frac{d^2x}{dy^2} = x'' = -\frac{y''}{y'^3}$$

est positif, la courbe tournera sa concavité du côté des x positifs ou *vers la droite*; si $x'' < 0$, la courbe sera concave *vers la gauche*.

Remarquons que la quantité x'' est de même signe que

$$-D_x(y'^2) = -2y'y'',$$

ou encore de même signe que $-\frac{y''}{y'}$.

348. Si y'' est de même signe que y, ou si l'on a $yy'' > 0$, la courbe sera *convexe vers l'axe des x*. Si $yy'' < 0$, elle sera *concave vers l'axe des x*.

De même, elle sera *convexe* ou *concave vers l'axe des y*, suivant que xx'' sera positif ou négatif.

Exemple. — Considérons la cycloïde allongée ou raccourcie, représentée par les deux équations

$$x = a(nt - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t).$$

On tire de ces équations

$$dx = a\,dt(n - \cos t), \quad dy = a\,dt.\sin t, \quad \text{d'où} \quad y' = \frac{\sin t}{n - \cos t},$$

$$dy' = \frac{n\cos t - 1}{(n - \cos t)^2}dt, \quad \text{d'où} \quad y'' = \frac{n\cos t - 1}{a(n - \cos t)^3}.$$

Pour $n < 1$, ce qui est le cas de la cycloïde raccourcie, y'' change de signe avec $n - \cos t$, et la *concavité* change de sens. Pour $n > 1$, ce qui répond à la cycloïde allongée, c'est le numérateur de y'', au lieu du dénominateur, qui change de signe. Pour $n = 1$, y'' est toujours négatif, et la courbe toujours convexe vers le bas.

Le sens de la concavité relativement aux x dépend du signe du rapport $-\frac{y''}{y'} = -\frac{n \cos t - 1}{a \sin t (n - \cos t)^2}$, c'est-à-dire du signe de $\frac{1 - n \cos t}{\sin t}$.

Remarquons que la détermination du sens de la concavité d'une courbe revient à examiner si y' croît dans le même sens que x ou en sens contraire.

549. *Points d'inflexion.* — Si y'' s'annule, alors la différence

$$Y - y = \frac{1}{6} h^3 (y''' + \varepsilon)$$

changera de signe avec h, de sorte que, d'un côté du point de contact, la courbe est au-dessus de la tangente, tandis que, de l'autre côté, elle est au-dessous. On dit alors que la courbe présente un *point d'inflexion*.

Remarquons que les conditions d'existence d'un point d'inflexion reviennent à celles-ci $D_x y' = 0$, $D_x^2 y'$ différent de zéro. Ce sont là précisément les conditions du maximum ou du minimum de y', comme on pouvait le prévoir *a priori*.

Si y''' s'annule en même temps que y'', il faut alors, pour qu'il y ait inflexion, que la première des dérivées suivantes qui ne s'annule pas soit d'ordre *impair*.

Cela revient à chercher la condition pour que y'' change de signe lorsqu'on passe de l'abscisse $x - h$ à l'abscisse $x + h$, c'est-à-dire pour que la concavité de la courbe change de sens. C'est là le seul caractère que l'on puisse employer dans le cas où le minimum de y' correspondrait à $y'' = \infty$ [392].

La règle serait en défaut si la valeur $y'' = \infty$, même accompagnée d'un changement dans le sens de la concavité, correspondait à un maximum ou à un minimum de x. Dans ce cas, pour juger s'il y a inflexion, on examinerait s'il y a changement de sens de la

concavité dans la direction des x, c'est-à-dire s'il y a changement de signe de $y'y''$ ou de $\frac{y''}{y'}$ [547].

550. *Exemples.* — I. La courbe $y = \frac{1-x}{x^2}$ a une inflexion pour

$$y'' = \frac{2(3-x)}{x^4} = 0,$$

c'est-à-dire pour $x = 3$.

II. La courbe $y = x^2 - x^4$ a deux points d'inflexion pour $x = \pm\sqrt{\frac{1}{6}}$.

III. Si l'on considère la cycloïde allongée ou raccourcie [548], on a $y'' = 0$ pour $\cos t_0 = \frac{1}{n}$, ce qui ne peut convenir qu'au cas de $n > 1$ ou de la cycloïde allongée. On voit bien, dans ce cas, que y'' change de signe avec $t - t_0$, et par suite avec $h = x - x_0$.

Dans le cas de la cycloïde raccourcie, y'' devient infini et change de signe pour $\cos t = n$; mais alors $\frac{dx}{dt}$ s'annule et change aussi de signe; donc x passe par un maximum ou par un minimum. D'autre part, $\frac{y''}{y'}$ ne change pas de signe, ce qui montre que la valeur $\cos t = n$ ne correspond pas à une inflexion.

Pour la cycloïde ordinaire, $n = 1$, $y'' = -\frac{1}{a(1-\cos t)^2}$, valeur toujours négative; donc la courbe est toujours concave vers le bas, et n'a pas d'inflexion. Pour $t = 0$, on a $y'' = \infty$, valeur qui correspond à un point de rebroussement.

551. Si la courbe est rapportée à des coordonnées polaires, le sens de la concavité par rapport à l'origine sera donné par le signe de la différence OT — OM′ (*fig.* 46) entre les rayons vecteurs de la courbe et de la tangente dans le voisinage du point de contact. Or, en menant MN perpendiculaire sur OM′, on a

$$\text{MTN} = \theta - h, \quad \text{OM}' = r + dr = r + r'h + \frac{1}{2}(r'' + \varepsilon)h^2, \quad \text{ON} = r\cos h,$$

d'où

$$M'N = r(1 - \cos h) + r'h + \frac{1}{2}(r'' + \varepsilon)h^2.$$

On a ensuite

$$\begin{aligned} TN &= r\sin h \cot(\theta - h) = r\sin h\left[\cot\theta + \frac{1+\varepsilon}{\sin^2\theta}h\right] \\ &= r'\sin h + \frac{r^2 + r'^2}{r}h^2(1+\varepsilon). \end{aligned}$$

On a d'ailleurs, aux infiniment petits près du troisième ordre,

$$1 - \cos h = \frac{1}{2}h^2, \quad \sin h = h;$$

donc

$$TM' = TN - M'N = -\frac{1}{2}rh^2 - \frac{1}{2}r''h^2 + \frac{r^2 + r'^2}{r}h^2 = (r^2 + 2r'^2 - rr'')\frac{h^2}{2r}.$$

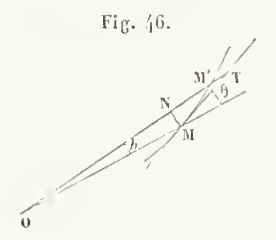
Cette expression peut se mettre sous la forme

$$\frac{1}{2}r^2h^2\left(\frac{1}{r} + D_p^2\frac{1}{r}\right) = \frac{h^2}{2u^2}(u + u''),$$

en posant $u = \frac{1}{r}$.

C'est donc le signe de $u + u''$ qui déterminera le sens de la concavité. Pour $u + u'' > 0$, la courbe sera concave vers l'origine;

Fig. 46.



pour $u + u'' < 0$, elle sera convexe vers l'origine, dans l'hypothèse de r et de u positifs. Si r et u étaient négatifs, on aurait dû prendre la différence entre M'O et O'T en sens contraire, et la courbe serait concave ou convexe vers l'origine suivant que $u + u''$ serait négatif ou positif.

Si l'on considère, par exemple, une section conique

$$ku = 1 + e\cos p,$$

on a

$$ku = -e\cos p, \quad \text{d'où} \quad u + u'' = \frac{1}{h} > 0;$$

donc la courbe est concave vers l'origine lorsque le rayon vecteur est positif, convexe lorsqu'il est négatif.

Les points d'inflexion sont donnés par la condition que M'T change de signe avec h. Il faut pour cela que $u + u''$ change de signe, et par suite qu'il s'annule en général, et quelquefois qu'il devienne infini.

§ IV.

COURBURE DES COURBES PLANES.

552. L'angle TAT', dont dévie la tangente à une courbe lorsque le point de contact passe d'une extrémité à l'autre d'un arc MM' (*fig.* 47), s'appelle la *courbure absolue* de cet arc. Cet angle est égal à l'angle MOM', que font entre elles les normales menées aux extrémités de l'arc.

Si la courbe est un cercle de rayon ρ, on a, en désignant par s

Fig. 47.



la longueur de l'arc MM', et par θ la courbure absolue de cet arc,

$$s = \theta\rho, \quad \theta = \frac{s}{\rho};$$

donc, dans un même cercle, la courbure absolue est proportionnelle à l'arc. Pour une même longueur d'arc prise dans des cercles différents, elle est inversement proportionnelle au rayon du cercle.

La *courbure spécifique* d'un cercle est la courbure absolue d'un arc égal à l'unité de longueur. Elle est donc représentée par $\frac{1}{\rho}$. Si maintenant s désigne un arc quelconque de cercle, et que θ soit

sa courbure absolue, comme on a $s = \theta\rho$, il s'ensuivra que la courbure spécifique du cercle sera exprimée par le rapport

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\theta}{s}.$$

Dans le cas d'une courbe quelconque, le rapport $\frac{\theta}{s}$ sera dit la *courbure moyenne* de l'arc de longueur s, dont θ est la courbure absolue. Ce sera la courbure spécifique d'un cercle qui, pour une même longueur d'arc, présenterait la même courbure absolue.

Si l'arc s est infiniment petit, la quantité

$$\frac{1}{\rho} = \lim \frac{\theta}{s}$$

sera la courbure du cercle de même courbure spécifique que l'arc infiniment petit s. C'est ce qu'on appellera simplement la *courbure* de la courbe au point considéré. Le rayon ρ ainsi déterminé se nomme le *rayon de courbure*. Si, sur la normale au point M, on porte, dans le sens de la concavité de la courbe, une longueur $OM = \rho$, le point O sera le *centre de courbure*, et le cercle décrit de ce centre et du rayon ρ sera le *cercle de courbure*.

En appelant τ l'angle que fait la tangente en M avec une direction fixe quelconque, la variation $d\tau$ de cet angle sera la déviation infiniment petite de la tangente, en passant d'une extrémité à l'autre de l'arc ds. On pourra donc mettre les expressions de la courbure et du rayon de courbure sous la forme

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\tau}{ds}, \quad \rho = \frac{ds}{d\tau}.$$

Ainsi le rayon de courbure est égal à l'élément d'arc divisé par l'angle de contingence [541].

553. Le centre de courbure est la limite du point d'intersection de la normale en M avec la normale en un point infiniment voisin. En effet, les quatre points M, O, M', A étant sur un même cercle, l'angle inscrit MOM' a pour mesure l'arc de cercle MAM', divisé par le diamètre OA. En posant donc $MOM' = TAT' = \theta$, on a

$$AO = \frac{\text{arc } MAM'}{\theta}.$$

Mais, pour MM′ infiniment petit, chacun des arcs qui aboutissent aux mêmes extrémités M, M′ diffère infiniment peu de la corde commune [537, 544], et, par conséquent, ces arcs diffèrent infiniment peu entre eux. On peut donc, dans la limite de rapport, remplacer l'arc de cercle MAM′ par l'arc de courbe MBM′ ou ds. On a donc

$$\lim \mathrm{AO} = \lim \mathrm{MO} = \lim \frac{ds}{d\tau} = \rho,$$

et, par conséquent, le point O a pour limite le centre de courbure.

554. Si l'on prend, pour fixer la direction de la tangente, son angle avec l'axe des x, on a

$$\tang \tau = \frac{dy}{dx} = y',$$

d'où

$$d\tau = \cos^2\tau\, dy' = \frac{dx^2}{ds^2}\, dy',$$

comme nous l'avions trouvé au n° 534. Donc

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\tau}{ds} = \frac{dx^2\, dy'}{ds^3} = \left(\frac{dx}{ds}\right)^3 \frac{dy'}{dx},$$

$$(1) \qquad \rho = \frac{ds^3}{dx^2\, d\dfrac{dy}{dx}} = \frac{ds^3}{y''\, dx^3},$$

en posant [302]

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d\dfrac{dy}{dx}}{dx},$$

ce qui revient à $y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$, lorsque la variable indépendante est x. On peut encore écrire

$$\frac{1}{\rho} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \rho = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}.$$

Si l'on désigne par N la longueur de la normale $y\dfrac{ds}{dx}$ [509], on aura la relation

$$\frac{1}{\rho} = \frac{y^3 y''}{\mathrm{N}^3}, \quad \rho = \frac{\mathrm{N}^3}{y^3 y''}.$$

555. Calculons maintenant les coordonnées du centre de courbure. Ce centre est sur la normale, qui a pour équation [507]

$$(\xi - x)\,dx + (\eta - y)\,dy = 0.$$

Le carré de la distance de ce centre (ξ, η) au point (x, y) est

$$(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 = \rho^2 = \left(\frac{ds^3}{y''\,dx^3}\right)^2.$$

On a donc

$$\frac{\xi - x}{-dy} = \frac{\eta - y}{dx} = \pm\frac{\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \pm\frac{\rho}{ds},$$

d'où l'on tire les valeurs de $\xi - x$, $\eta - y$, mais avec une ambiguïté de signe. Pour lever cette ambiguïté, rappelons-nous que la formule (1) du numéro précédent, $\rho = \dfrac{ds^3}{y''\,dx^3}$, donne pour $\rho\,dx$ une valeur positive ou négative, suivant que la courbe sera concave vers le haut ou vers le bas [546]. Or le centre de courbure étant dans la concavité, $\eta - y$ doit être de même signe que y'', et, par suite, que $\rho\,dx$. Donc il faut prendre le signe supérieur, ce qui donne

$$\xi - x = -\rho\frac{dy}{ds} = -\frac{ds^2\,dy}{y''\,dx^3}, \quad \eta - y = \rho\frac{dx}{ds} = \frac{ds^2}{y''\,dx^2}.$$

556. On peut arriver au même résultat, en cherchant la limite de l'intersection de deux normales infiniment voisines.

Soit, en général,

$$V = V(\xi, \eta, x, y) = 0$$

l'équation d'une ligne, dans laquelle ξ, η sont les coordonnées variables, et x, y, qui jouent le rôle de paramètres, les coordonnées d'un point donné sur une autre courbe donnée. Si l'on passe du point (x, y) au point infiniment voisin $(x + dx, y + dy)$ de la même courbe, l'équation $V = 0$ devient

$$V(\xi, \eta, x + dx, y + dy) = V + dV = 0,$$

la différence dV ou $d_{x,y}V$, étant prise par rapport à x, y, en laissant ξ, η constants. Pour avoir l'intersection des deux lieux infiniment voisins

$$V = 0, \quad V + dV = 0,$$

il faut considérer ces deux équations comme existant simultanément, ce qui revient à poser à la fois

$$V = 0, \quad dV = 0,$$

et, de ces deux dernières équations, on tirera les valeurs de ξ et de η.

337. Si maintenant $V = 0$ représente l'équation de la normale, les deux équations précédentes pourront s'écrire sous la forme

$$\xi - x + y'(\eta - y) = 0, \quad -1 + y''(\eta - y) - y'^2 = 0,$$

d'où l'on tire

$$\eta - y = \frac{1 + y'^2}{y''} = \frac{ds^2}{y''\,dx^2}, \quad \xi - x = -y'\,\frac{1 + y'^2}{y''} = -\frac{dy\,ds^2}{y''\,dx^3},$$

$$\rho = \pm\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2} = \pm\frac{ds^2}{y''\,dx^2}\sqrt{1 + y'^2} = \pm\frac{ds^3}{y''\,dx^3},$$

le signe étant choisi de manière que la valeur soit positive, lorsqu'on ne veut avoir que la longueur absolue de ρ.

338. On peut calculer l'angle de contingence d'une autre manière, qui fait connaître en même temps le centre de courbure. Pour cela, démontrons d'abord une formule importante et d'un fréquent usage.

Soient a, b les cosinus des angles qu'une droite mobile fait avec les axes; $a + da$, $b + db$ les cosinus analogues, correspondants à une autre position de la droite; θ l'angle que font entre elles ces deux positions. Le cosinus de cet angle aura pour valeur, à cause de $a^2 + b^2 = 1$,

$$\cos\theta = a(a + da) + b(b + db) = 1 + a\,da + b\,db.$$

On a d'ailleurs

$$1 = (a + da)^2 + (b + db)^2 = 1 + 2(a\,da + b\,db) + da^2 + db^2,$$

d'où

$$a\,da + b\,db = -\frac{1}{2}(da^2 + db^2).$$

ce qui donne la formule rigoureuse

$$\sqrt{2(1-\cos\theta)} = 2\sin\frac{1}{2}\theta = \sqrt{da^2+db^2}.$$

Si maintenant les accroissements da, db sont infiniment petits, ainsi que l'angle $\theta = d\tau$, on aura

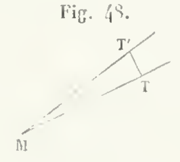
$$2\sin\frac{1}{2}\theta = d\tau,$$

aux infiniment petits près du troisième ordre, d'où la formule générale pour l'angle de deux directions infiniment voisines

$$d\tau = \sqrt{da^2+db^2}.$$

559. Cela posé, par le point $M(x,y)$ (*fig.* 48), menons la tangente MT en ce point et la parallèle MT′ à la tangente au point $M'(x+dx, y+dy)$. Prenons sur ces deux droites des longueurs quelconques égales entre elles $MT = MT' = l$. La droite TT′, dirigée de T vers T′, tendra vers le sens de la concavité de la

Fig. 48.



courbe, et sa direction aura pour limite une parallèle au rayon de courbure, puisque les angles à la base du triangle isoscèle MTT′ ont chacun pour limite un angle droit.

Or les cosinus des angles que fait la tangente MT avec les axes ont pour valeurs [508] $a = \frac{dx}{ds}$, $b = \frac{dy}{ds}$. On aura donc, en appliquant la formule (1) du numéro précédent,

$$d\tau = \sqrt{\left(d\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dy}{ds}\right)^2}.$$

560. Si l'on projette le contour du triangle MTT′ sur l'axe des x, et que l'on désigne par λ, μ les angles que fait la direc-

tion TT′ avec les axes, on aura

$$\mathrm{MT}.a + \mathrm{TT}'\cos\lambda - \mathrm{T}'\mathrm{M}(a + da) = 0,$$

ou, à cause de $\mathrm{TT}' = \mathrm{MT}.d\tau$, aux infiniment petits près du troisième ordre,

$$d\tau\cos\lambda = da,$$

et de même

$$d\tau\cos\mu = db;$$

donc

$$d\tau = \frac{da}{\cos\lambda} = \frac{db}{\cos\mu} = \pm\sqrt{da^2 + db^2},$$

où nous prendrons le signe +, si nous voulons considérer $d\tau$ comme une grandeur absolue. Donc, en mettant pour a, b leurs valeurs $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, il vient

$$\cos\lambda = \frac{1}{d\tau}\,d\,\frac{dx}{ds},\quad \cos\mu = \frac{1}{d\tau}\,d\,\frac{dy}{ds},$$

$$\xi - x = \rho\cos\lambda = \frac{\rho}{d\tau}\,d\,\frac{dx}{ds},\quad \eta - y = \rho\sin\lambda = \frac{\rho}{d\tau}\,d\,\frac{dy}{ds},$$

ρ étant pris, comme $d\tau$, en valeur absolue.

561. On a maintenant, à cause de

$$ds^2 = dx^2 + dy^2,\quad ds\,d^2s = dx\,d^2x + dy\,d^2y,$$

$$d\,\frac{dx}{ds} = \frac{ds^2\,d^2x - dx\,ds\,d^2s}{ds^2} = \frac{(dx^2 + dy^2)\,d^2x - dx(dx\,d^2x + dy\,d^2y)}{ds^3}$$

$$= \frac{dy(dy\,d^2x - dx\,d^2y)}{ds^3} = -\frac{dy\,dx^2.\,d\,\frac{dy}{dx}}{ds^3},$$

et de même

$$d\,\frac{dy}{ds} = \frac{dx\,.\,dx^2\,.\,d\,\frac{dy}{dx}}{ds^3};$$

les valeurs de $\xi - x$, $\eta - y$ peuvent donc s'écrire

$$\xi - x = -\rho\,\frac{y'\,dx^3\,dy'}{d\tau\,ds^3},\quad \eta - y = \rho\,\frac{dx^3\,dy'}{d\tau\,ds^3},$$

ou, à cause de $\rho = \frac{ds}{d\tau}$,

$$\xi - x = -y' \frac{dx^3 dy'}{d\tau^2 ds^2}, \quad \eta - y = \frac{dx^3 dy'}{d\tau^2 ds^2}.$$

D'ailleurs

$$d\tau^2 = \left(d\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dy}{ds}\right)^2 = (dx^2 + dy^2)\left(\frac{dx^2 dy'}{ds^3}\right)^2 = \frac{dx^4 dy'^2}{ds^4},$$

d'où

$$d\tau = \pm \frac{dx^2 dy'}{ds^2},$$

le signe étant choisi de telle sorte que le second membre soit positif. Donc, en mettant pour $d\tau^2$ sa valeur,

$$\xi - x = -y' \frac{ds^2}{dx\, dy'}, \quad \eta - y = \frac{ds^2}{dx\, dy'},$$

$$\rho = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2} = \pm \frac{ds^2}{dx\, dy'} \sqrt{1 + y'^2} = \pm \frac{ds^3}{dx^2 dy'},$$

le signe étant choisi de manière que la valeur de ρ soit positive. On retrouve ainsi les résultats du n° 557.

562. On peut mettre l'expression (2) [559] de $d\tau$ sous une autre forme. Des égalités $dx^2 + dy^2 = ds^2$, $dx\,d^2x + dy\,d^2y = ds\,d^2s$ on conclut

$$d\tau^2 = \frac{ds^2(d^2x^2 + d^2y^2) - 2\,ds\,d^2s(dx\,d^2x + dy\,d^2y) + d^2s^2(dx^2 + dy^2)}{ds^4}$$

$$= \frac{ds^2(d^2x^2 + d^2y^2) - 2\,ds\,d^2s . ds\,d^2s + d^2s^2 . ds^2}{ds^4} = \frac{d^2x^2 + d^2y^2 - d^2s^2}{ds^2},$$

d'où

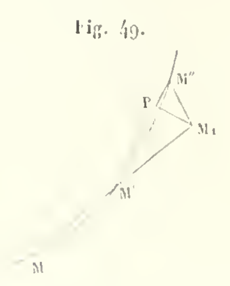
(3) $$d\tau = \frac{1}{ds}\sqrt{d^2x^2 + d^2y^2 - d^2s^2}.$$

563. Il est facile de démontrer cette dernière formule directement. Prenons sur la courbe trois points consécutifs (*fig.* 49),

$$\mathrm{M}(x, y), \quad \mathrm{M}'(x + dx,\ y + dy),$$
$$\mathrm{M}''[x + dx + d(x + dx),\quad y + dy + d(y + dy)],$$

et calculons l'angle des deux cordes consécutives infiniment peu

Fig. 49.



différentes $MM'M_1$, $M'M''$, angle que nous avons vu être égal à l'angle de contingence [545]. Soient l'arc

$$MM' = ds,$$

l'arc

$$M'M'' = ds + d^2 s.$$

Sur le prolongement de MM' prenons $M'M_1 = MM' = ds$ [544]. Les coordonnées de M_1 seront $x + 2dx$, $y + 2dy$. Par conséquent, la distance $M_1 M''$ a pour expression

$$M_1 M'' = \sqrt{d^2 x^2 + d^2 y^2}.$$

En projetant d'ailleurs $M'M_1$ sur $M'M''$, on a, à un infiniment petit près d'ordre supérieur au second [537], $M'P = M'M_1 = ds$, d'où $PM'' = d^2 s$, et, de plus, $M_1 P = ds\,d\tau$. Donc

$$ds\,d\tau = \sqrt{\overline{M_1 M''}^2 - \overline{M'' P}^2} = \sqrt{d^2 x^2 + d^2 y^2 - d^2 s^2}.$$

Si l'on s'était appuyé sur le résultat que l'on vient de trouver directement au lieu de partir de la proposition du n° 545, on aurait obtenu une nouvelle démonstration de cette proposition.

On a, d'ailleurs, d'après ce qui précède,

$$ds^4 d\tau^2 = (dx^2 + dy^2)(d^2 x^2 + d^2 y^2) - (dx\,d^2 x + dy\,d^2 y)^2$$
$$= (dx\,d^2 y - dy\,d^2 x)^2 = dx^4 \left(d\frac{dy}{dx}\right)^2,$$

d'où

$$d\tau = \pm \frac{dx^2}{ds^2}\, d\,\frac{dy}{dx},$$

comme on l'avait trouvé par d'autres procédés.

564. Considérons maintenant le cas où la courbe est rapportée à des coordonnées polaires. Nous avons vu [516] que l'on a

$$\tau = p + \theta, \quad \text{d'où} \quad d\tau = dp + d\theta.$$

Or on a

$$\tang\theta = \frac{r}{r'}, \quad \text{d'où} \quad \text{séc}^2\theta\, d\theta = d\,\frac{r}{r'},$$

$$d\theta = \frac{dr^2}{ds^2}\, d\,\frac{r}{r'} = \frac{dr^2}{ds^2}\,\frac{dr^2 - r d^2 r}{r'^2\, dp} = dp\,\frac{r'^2 - r r''}{r^2 + r'^2},$$

$$d\tau = dp\left(1 + \frac{dr^2 - r d^2 r}{dr^2 + r^2 dp^2}\right) = dp\,\frac{2dr^2 - r d^2 r + r^2 dp^2}{ds^2},$$

ou enfin

$$d\tau = dp\,\frac{r^2 + 2r'^2 - r r''}{r^2 + r'^2},$$

d'où l'on tire

$$\rho = \frac{ds}{d\tau} = \frac{ds^3}{dp(2dr^2 - r d^2 r + r^2 dp^2)} = \frac{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2r'^2 - r r''}.$$

Si l'on fait le même calcul en introduisant, au lieu de r, son inverse $u = \frac{1}{r}$, on aura [517]

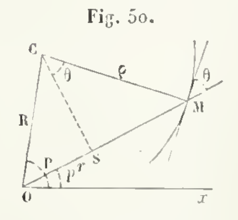
$$\tang\theta = -\frac{u}{u'},$$

et l'on en tire [518]

$$d\tau = \frac{(u + u'')\,u\,dp}{u^2 + u'^2}, \quad \rho = \frac{(u^2 + u'^2)^{\frac{3}{2}}}{u^3(u + u'')} = \frac{u^3 N^3}{u + u''}, \quad \frac{1}{\rho} = \frac{u + u''}{\left(1 + \frac{u'^2}{u^2}\right)^{\frac{3}{2}}},$$

565. Cherchons les coordonnées du centre de courbure C

Fig. 50.



(*fig.* 50). En abaissant CS perpendiculaire sur le rayon vecteur OM, et désignant par R, P les coordonnées polaires du point C,

on a

$$\mathrm{MCS} = \theta, \quad \mathrm{CS} = \rho\cos\theta, \quad \mathrm{SM} = \rho\sin\theta,$$
$$\mathrm{OS} = \mathrm{R}\cos(\mathrm{P}-p) = r - \mathrm{SM}, \quad \mathrm{CS} = \mathrm{R}\sin(\mathrm{P}-p);$$

donc

$$\mathrm{R}\sin(\mathrm{P}-p) = \rho\cos\theta = \rho\frac{dr}{ds},$$

$$\mathrm{R}\cos(\mathrm{P}-p) = r - \rho\sin\theta = r\left(1 - \frac{\rho\,dp}{ds}\right).$$

Or on a

$$\frac{\rho}{ds} = \frac{1}{d\tau}, \quad 1 - \frac{dp}{d\tau} = \frac{d\theta}{d\tau},$$

Donc

$$\mathrm{R}\sin(\mathrm{P}-p) = \frac{dr}{d\tau}, \quad \mathrm{R}\cos(\mathrm{P}-p) = \frac{r\,d\theta}{d\tau},$$

$$\mathrm{R} = \frac{1}{d\tau}\sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2}, \quad \mathrm{tang}(\mathrm{P}-p) = \frac{dr}{r\,d\theta}.$$

566. Pour avoir le lieu des centres de courbure d'une courbe donnée, il suffit d'éliminer les coordonnées de la courbe entre l'équation de cette courbe et les équations qui donnent les coordonnées du centre de courbure. Donnons quelques exemples de cette détermination.

I. Soit la parabole, donnée par l'équation

$$y^2 = 2kx, \quad \text{d'où} \quad y\,dy = k\,dx,$$
$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{k} = \frac{ds}{\sqrt{y^2+k^2}},$$
$$\frac{dx}{ds} = \frac{y}{\sqrt{y^2+k^2}}, \quad \frac{dy}{ds} = \frac{k}{\sqrt{y^2+k^2}}.$$

Si l'on pose, pour plus de simplicité, $y = k\,\mathrm{Sh}\,\varphi$, d'où $x = \frac{k}{2}\mathrm{Sh}^2\varphi$, il viendra

$$d\tau^2 = (d\,\mathrm{Th}\,\varphi)^2 + (d\,\mathrm{S\acute{e}ch}\,\varphi)^2 = \frac{(1+\mathrm{Sh}^2\varphi)\,d\varphi^2}{\mathrm{Ch}^4\varphi} = \frac{d\varphi^2}{\mathrm{Ch}^2\varphi}, \quad d\tau = \frac{d\varphi}{\mathrm{Ch}\,\varphi},$$

$$\cos\lambda = \frac{1}{d\tau}\,d\,\mathrm{Th}\,\varphi = \frac{1}{\mathrm{Ch}\,\varphi}, \quad \cos\mu = \frac{1}{d\tau}\,d\,\mathrm{S\acute{e}ch}\,\varphi = -\frac{\mathrm{Ch}\,\varphi}{d\varphi}\cdot\frac{\mathrm{Sh}\,\varphi\,d\varphi}{\mathrm{Ch}^2\varphi} = -\mathrm{Th}\,\varphi,$$

$$ds = k\,\mathrm{Ch}^2\varphi\,d\varphi, \quad \rho = k\,\mathrm{Ch}^3\varphi,$$

$$\xi - x = \rho\cos\lambda = k\,\mathrm{Ch}^2\varphi, \quad \eta - y = \rho\cos\mu = -k\,\mathrm{Ch}^2\varphi\,\mathrm{Sh}\,\varphi,$$

$$\xi = k\left(\tfrac{1}{2}\mathrm{Sh}^2\varphi + \mathrm{Ch}^2\varphi\right) = k\left(1 + \tfrac{3}{2}\mathrm{Sh}^2\varphi\right), \quad \eta = k\,\mathrm{Sh}\,\varphi\,(1 - \mathrm{Ch}^2\varphi) = -k\,\mathrm{Sh}^3\varphi.$$

Éliminant $\mathrm{Sh}\varphi$ entre ces deux dernières équations, il vient

$$\eta^2 = \frac{8}{27k}(\xi - k)^3,$$

équation du lieu des centres de courbure de la parabole.

II. Soit la chaînette, représentée par les équations

$$x = a\varphi, \quad y = a\,\mathrm{Ch}\,\varphi.$$

On tire de ces équations

$$dx = a\,d\varphi, \quad dy = a\,\mathrm{Sh}\,\varphi\,d\varphi, \quad ds = a\,\mathrm{Ch}\,\varphi\,d\varphi,$$

$$d\frac{dx}{ds} = d\frac{1}{\mathrm{Ch}\,\varphi} = \cos\lambda\,d\tau = -\frac{\mathrm{Sh}\,\varphi\,d\varphi}{\mathrm{Ch}^2\varphi}, \quad d\frac{dy}{ds} = d\,\mathrm{Th}\,\varphi = \cos\mu\,d\tau = \frac{d\varphi}{\mathrm{Ch}^2\varphi},$$

$$d\tau = \frac{d\varphi}{\mathrm{Ch}\,\varphi}, \quad \cos\lambda = -\,\mathrm{Th}\,\varphi, \quad \cos\mu = \frac{1}{\mathrm{Ch}\,\varphi},$$

$$\rho = \frac{ds}{d\tau} = a\,\mathrm{Ch}^2\varphi, \quad \xi - x = -\,a\,\mathrm{Sh}\,\varphi\,\mathrm{Ch}\,\varphi, \quad \eta - y = a\,\mathrm{Ch}\,\varphi,$$

$$\xi = a(\varphi - \mathrm{Ch}\,\varphi\,\mathrm{Sh}\,\varphi) = x - y\sqrt{\frac{y^2}{a^2} - 1}, \quad \eta = 2a\,\mathrm{Ch}\,\varphi = 2y.$$

III. Soit enfin la spirale logarithmique $r = ae^{np}$. On tire de cette équation

$$r' = nr, \quad r'' = n^2 r, \quad ds = r\,dp\sqrt{1+n^2} = dr\frac{\sqrt{1+n^2}}{n},$$

$$\mathrm{tang}\,\theta = \frac{1}{n}, \quad d\theta = 0, \quad d\tau = dp, \quad \rho = r\sqrt{1+n^2},$$

et, par suite,

$$\mathrm{R}\sin(\mathrm{P} - p) = \frac{dr}{dp} = nr, \quad \mathrm{R}\cos(\mathrm{P} - p) = 0.$$

Donc le centre de courbure est sur une perpendiculaire au rayon vecteur, et $\mathrm{R} = nr$ est la sous-normale. On voit aisément que le lieu des centres de courbure n'est autre chose que la courbe elle-même, que l'on aurait fait tourner d'un certain angle autour de l'origine.

§ V.

CONTACTS DES DIVERS ORDRES. — COURBES OSCULATRICES. REMARQUES SUR LE CERCLE OSCULATEUR.

367. Considérons deux courbes, données par les équations

$$f(x, y) = 0, \quad F(X, Y) = 0.$$

Si l'on suppose que, pour une certaine abscisse $X = x$, les deux courbes se rencontrent, et que l'on ait $Y = y$, la différence des ordonnées

$$Y + h(Y' + \varepsilon), \quad y + h(y' + \varepsilon)$$

qui correspondent à une abscisse $x + h$ infiniment voisine de x, savoir,

$$h(Y' - y' + \varepsilon),$$

sera généralement infiniment petite du premier ordre en même temps que h. Cela arrivera dans le cas général où les courbes ont, en leur point commun, des tangentes différentes. On dit alors que ces courbes sont *sécantes*.

Si, outre la condition $Y = y$, on a $Y' = y'$, alors la différence des ordonnées,

$$h\varepsilon = \frac{h^2}{2}(Y'' - y'' + \varepsilon_1),$$

sera généralement infiniment petite du *second ordre*, et le rapport de cette différence à l'accroissement h de l'abscisse, à partir du point commun, sera infiniment petit du *premier ordre*. On dit alors que les deux courbes ont entre elles un *contact du premier ordre*. Elles sont alors tangentes à la même droite.

Si, de plus, $Y'' = y''$, la différence des ordonnées

$$\frac{1}{2}h^2\varepsilon_1 = \frac{1}{6}h^3(Y''' - y''' + \varepsilon_2)$$

est alors du troisième ordre, et le rapport de cette différence à la distance h est du *second ordre*. On dit alors que les deux courbes ont un *contact du second ordre*. Les valeurs de ρ étant les mêmes

pour les deux courbes, on voit qu'elles ont même rayon de courbure et même cercle de courbure.

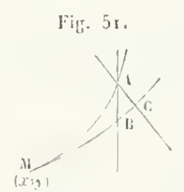
En général, si, pour l'abscisse $X = x$, on a les $n + 1$ égalités

$$Y = y, \quad Y' = y', \quad Y'' = y'', \quad \ldots, \quad Y^{(n)} = y^{(n)},$$

la différence entre les ordonnées y_1, Y_1 des deux courbes qui répondent à l'abscisse infiniment voisine $x + h$ sera infiniment petite de l'ordre $n + 1$, et le rapport $\frac{Y_1 - y_1}{h}$ de la différence des ordonnées à l'accroissement d'abscisse h sera infiniment petit de l'ordre n. On dira, dans ce cas, que les courbes ont entre elles un *contact du $n^{ième}$ ordre*.

Remarquons que la définition que nous venons de donner de l'ordre de contact, et qui est fondée sur la considération de la distance des points des deux courbes situés sur une même ordonnée, conduit à un résultat indépendant de la direction des ordonnées, pourvu que cette direction ne soit pas parallèle à la tangente à l'une des deux courbes au point considéré; car, si l'on mène par le point $A(x + h, y_1)$ (*fig.* 51) deux droites de directions quel-

Fig. 51.



conques, non parallèles aux tangentes en M, les angles du triangle infinitésimal ABC tendront vers des limites finies, et le rapport des côtés AB, AC aura aussi une limite finie. Donc AB et AC seront des infiniment petits de même ordre.

568. Soit une courbe (C), dont l'équation

$$F(X, Y, a, a_1, \ldots, a_n) = 0$$

renferme $n + 1$ paramètres arbitraires $a, a_1, \ldots, a_n$. On peut disposer de ces paramètres de façon que la courbe (C) satisfasse à $n + 1$ conditions données. Si ces conditions consistent en ce que

la courbe (C) ait avec une courbe donnée

$$(2) \qquad f(x, y) = 0$$

un contact d'ordre n, c'est-à-dire de l'ordre le plus élevé possible, la courbe (C) sera dite alors *osculatrice* à la courbe (2) au point (x, y).

Soient

$$\begin{aligned} &F\,(X, Y, a, a_1, \ldots, a_n) = 0,\\ &F_1(X, Y, Y', a, a_1, \ldots, a_n) = 0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ &F_n(X, Y, Y', \ldots, Y^{(n)}, a, a_1, \ldots, a_n) = 0 \end{aligned}$$

les équations que l'on obtient en différentiant n fois l'équation (1). Les conditions pour que la courbe (C) ait avec la courbe donnée un contact d'ordre n étant exprimées par les équations

$$(3) \qquad Y = y, \quad Y' = y', \quad Y'' = y'', \quad \ldots, \quad Y^{(n)} = y^{(n)},$$

pour $X = x$, il en résulte que les équations précédentes devront être vérifiées quand on y remplacera

$$X, Y, Y', \ldots, Y^{(n)}$$

respectivement par les valeurs connues

$$x, y, y', \ldots, y^{(n)}.$$

On aura donc, pour déterminer les $n+1$ paramètres de la courbe (C), osculatrice à la courbe (2) au point (x, y), les équations

$$\begin{aligned} &F\,(x, y, a, a_1, \ldots a_n) = 0,\\ &F_1(x, y, y', a, a_1, \ldots, a_n) = 0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ &F_n(x, y, y', \ldots, y^{(n)}, a, a_1, \ldots, a_n) = 0, \end{aligned}$$

$y, y', \ldots, y^{(n)}$ étant les valeurs tirées de l'équation (2) et de ses n premières dérivées, et relatives à l'abscisse donnée x.

569. Supposons actuellement que les $n+1$ conditions pour la détermination de la courbe (C) soient que cette courbe passe par un point (x, y) de la courbe (2) et par n autres points de la même courbe, correspondants aux abscisses $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Les ordon-

nées des deux courbes, correspondantes aux abscisses $x, x_1, \ldots, x_n$, devront être respectivement égales, c'est-à-dire que l'on devra avoir les $n+1$ égalités

$$(4) \qquad Y = y, \quad Y_1 = y_1, \quad \ldots, \quad Y_n = y_n.$$

D'après cela, l'équation (1) fournira, pour déterminer $a, a_1, \ldots, a_n$, les $n+1$ conditions

$$\begin{gathered} F(x, y, a, a_1, \ldots, a_n) = 0, \\ F(x_1, y_1, a, a_1, \ldots, a_n) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ F(x_n, y_n, a, a_1, \ldots, a_n) = 0. \end{gathered}$$

Si l'on conçoit, maintenant, que les $n+1$ points donnés sur la courbe (2) deviennent infiniment voisins, la courbe (C) tendra vers une certaine limite; cherchons ce que deviennent alors les conditions précédentes.

Soient, pour abréger,

$$h_1, h_2, \ldots, h_n$$

les différences

$$x_1 - x, \; x_2 - x, \; \ldots, \; x_n - x.$$

En développant les valeurs des ordonnées qui entrent dans les équations (4), ces équations deviennent

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} 0 &= Y - y, \\ 0 &= Y - y + \frac{h_1}{1}(Y' - y' + \varepsilon_1), \\ 0 &= Y - y + \frac{h_2}{1}(Y' - y') + \frac{h_2^2}{1.2}(Y'' - y'' + \varepsilon_2), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 &= Y - y + \frac{h^n}{1}(Y' - y') + \frac{h_2^n}{1.2}(Y'' - y'') + \ldots \\ &\quad + \frac{h_n^n}{1.2\ldots n}(Y^{(n)} - y^{(n)} + \varepsilon_n). \end{aligned} \right.$$

Donc, pour que (C) passe par le point (x, y) de la courbe (2), il faut que l'on ait $Y - y = 0$, ce qui réduit la seconde des équations précédentes à $Y' - y' + \varepsilon_1 = 0$. Si h_1, et par suite ε_1 deviennent infiniment petits, cette équation deviendra, à la limite,

$Y' - y' = 0$, et par conséquent les conditions qui expriment que les deux courbes ont deux points communs infiniment voisins seront $Y = y$, $Y' = y'$, et ce sont précisément là les conditions qui établissent entre les deux courbes un contact de premier ordre.

Ces conditions étant remplies, la troisième équation (5) se réduit à $Y'' - y'' + \varepsilon_2 = 0$. Si le troisième point (x_2, y_2) se rapproche indéfiniment du premier (x, y), ε_2 devenant infiniment petit avec h_2, on aura alors la condition limite $Y'' = y''$, qui, jointe aux deux précédentes, exprimera que les deux courbes ont trois points communs infiniment voisins, et, en même temps, qu'elles ont entre elles un contact du second ordre.

La quatrième condition se réduit alors à $Y''' - y''' + \varepsilon_3 = 0$, d'où l'on tire, à la limite, $Y''' = y'''$, et ainsi de suite. Si donc les $n + 1$ points se réunissent en un seul, on aura, pour les conditions que doit remplir la courbe (C),

$$Y = y, \quad Y' = y', \quad Y'' = y'', \quad \ldots, \quad Y^{(n)} = y^{(n)},$$

qui sont précisément les conditions pour que les deux courbes aient entre elles un contact du $n^{\text{ième}}$ ordre ou soient osculatrices.

Ainsi la courbe cherchée sera la courbe d'espèce (C) osculatrice à la courbe donnée (2), ayant avec celle-ci le plus grand nombre possible de points communs infiniment voisins, ou, ce qui revient au même, ayant avec (2) un contact de l'ordre le plus élevé possible.

570. *Exemples.* — I. *Droite osculatrice.* L'équation d'une droite

$$Y = aX + b$$

contient deux paramètres a, b. On pourra en disposer de manière à établir, en général, entre la droite et une courbe donnée, un contact du premier ordre. On aura, pour cela, les conditions

$$y = ax + b, \quad y' = a,$$

d'où l'on tire

$$a = y', \quad b = y - xy',$$

et l'on retrouve ainsi l'équation de la tangente [504].

Si, au point considéré de la courbe, on a $y'' = 0 = Y''$, c'est-

à-dire, si le point (x, y) est un point d'inflexion de la courbe, le contact de la courbe avec sa tangente sera du second ordre. Il sera de l'ordre n, si l'on a à la fois

$$y'' = y''' = \ldots = y^{(n)} = 0.$$

II. *Cercle osculateur.* — L'équation d'un cercle

$$(X - \alpha)^2 + (Y - \beta)^2 = R^2$$

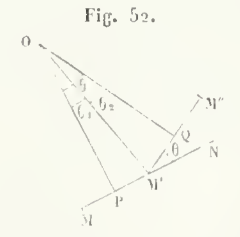
renfermant trois paramètres, on pourra obtenir, en général, entre la courbe et le cercle, un contact du second ordre, en posant les équations

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2,$$
$$x - \alpha + (y - \beta) y' = 0,$$
$$1 + y'^2 + (y - \beta) y'' = 0,$$

équations qui sont identiques avec celles qui déterminent le cercle de courbure [557]. Donc le cercle de courbure est en même temps le cercle osculateur.

571. On peut démontrer géométriquement, comme il suit, l'identité du cercle de courbure et du cercle osculateur. Le cercle osculateur étant la limite du cercle qui passe par les trois points infiniment voisins M, M', M'' (*fig.* 52), son centre sera la limite de

Fig. 52.



l'intersection des perpendiculaires élevées sur les milieux des cordes MM', M'M''. Soient c_1, c_2 les longueurs de ces cordes, R le rayon OM', θ l'angle M''M'N des deux cordes; θ_1, θ_2 les angles des perpendiculaires OP, OQ avec OM'. On aura

$$\sin\theta_1 = \frac{c_1}{2R}, \quad \sin\theta_2 = \frac{c_2}{2R},$$

d'où

$$\cos\theta_1 = \sqrt{1 - \left(\frac{c_1}{2R}\right)^2}, \quad \cos\theta_2 = \sqrt{1 - \left(\frac{c_2}{2R}\right)^2},$$

et, à cause de $\theta_1 + \theta_2 = \theta$,

$$R \sin\theta = \frac{1}{2} c_1 \sqrt{1 - \left(\frac{c_2}{2R}\right)^2} + \frac{1}{2} c_2 \sqrt{1 - \left(\frac{c_1}{2R}\right)^2}.$$

On en tire, en négligeant des infiniment petits du troisième ordre,

$$R\theta = \frac{c_1 + c_2}{2},$$

ce que l'on aurait pu voir directement, en négligeant la différence entre chaque corde et son arc. Or nous avons vu [545] que l'angle de deux cordes infiniment petites, correspondantes aux abscisses x, $x + h_1$, $x + h_1 + h_2$, est

$$\theta = \frac{h_1 + h_2}{2} \cdot \frac{1 + y'^2}{y''(1 + \varepsilon)} = \frac{h_1 + h_2}{2} \frac{d\tau}{dx};$$

donc

$$R = \frac{c_1 + c_2}{h_1 + h_2} \cdot \frac{dx}{d\tau}.$$

Mais chacun des rapports $\frac{c_1}{h_1}$, $\frac{c_2}{h_2}$ diffère infiniment peu de $\frac{ds}{dx}$: il en est donc de même du rapport $\frac{c_1 + c_2}{h_1 + h_2}$. Donc

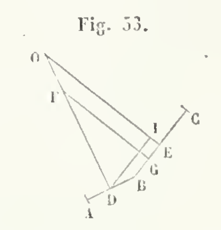
$$R = \frac{ds}{dx} \cdot \frac{dx}{d\tau} = \frac{ds}{d\tau} = \rho.$$

572. Le centre de courbure est la limite de l'intersection de deux normales infiniment voisines [553], tandis que le centre du cercle osculateur est la limite de l'intersection des perpendiculaires élevées sur les milieux de deux cordes infiniment petites. Bien que ces deux perpendiculaires aient elles-mêmes pour limites deux normales infiniment voisines, on ne serait pas autorisé pour cela à en conclure immédiatement l'identité des deux points de rencontre.

Remarquons, en effet, que, si l'on élevait une perpendiculaire à

l'une des cordes en son milieu D (*fig.* 53), et une perpendiculaire à l'autre corde en un point G différent de son milieu E, la perpendiculaire GF aurait bien pour limite une normale à la courbe; mais elle couperait la perpendiculaire DO en un point F situé

Fig. 53.



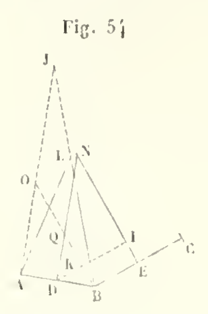
à une distance finie de O, si GE est une fraction finie de la distance infiniment petite DI. Donc, si le rapport $\frac{BG}{GC}$ est constamment différent de l'unité, la limite du point F ne sera pas celle du point O. Il semblerait donc, au premier abord, que la limite du point de rencontre de deux normales infiniment voisines varie suivant la manière dont on définit la normale, comme limite de telle ou telle perpendiculaire.

La raison de cette espèce de paradoxe est que, si deux droites font entre elles un angle infiniment petit, leur point de rencontre pourra se déplacer d'une quantité finie, lorsqu'on fera varier la direction de l'une de ces droites d'un angle infiniment petit de même ordre que celui que les droites font entre elles, ou lorsqu'on fera mouvoir l'une des droites parallèlement à elle-même d'une quantité infiniment petite du même ordre que la perpendiculaire abaissée d'un des points de l'une de ces droites sur l'autre droite.

Soient maintenant AL, BL (*fig.* 54) les normales à une courbe aux points infiniment voisins A, B. Si l'on remplace l'une de ces normales AL par la perpendiculaire AJ à la corde AB, cette perpendiculaire faisant avec AL un angle infiniment petit du premier ordre $\left(=\frac{1}{2}\,\text{ALB}\right)$ [541], son point d'intersection avec BL se trouve déplacé, de L en J, d'une quantité finie, et il est aisé de voir que JL diffère infiniment peu de LB. Si l'on mène maintenant BO perpendiculaire à la corde BC, en remplaçant BL par BO, le point d'intersection se déplacera de nouveau d'une quantité JO, qui

différera infiniment peu de LB, si BC diffère infiniment peu de AB. Donc, dans le cas de AB = BC, AO diffère infiniment peu de AL, et, comme l'angle OAL est infiniment petit, le point O est

Fig. 54.



infiniment voisin du centre de courbure L, et sa limite est la même. Ainsi, le centre de courbure est la limite du point de rencontre des perpendiculaires élevées aux extrémités antérieures de deux cordes consécutives infiniment petites, lorsque ces cordes sont égales ou infiniment peu différentes. Car c'est sous cette dernière condition qu'on a eu $OAL = OBL = \frac{1}{2} AOB$.

Si les cordes étaient inégales, le triangle BOJ ne serait pas isoscèle, puisque l'angle des cordes ne serait plus égal à celui des normales [545], et la limite du point O ne serait plus la même que celle du point L.

Si nous transportons maintenant la perpendiculaire AO parallèlement à elle-même au milieu D de la corde AB, en DQ, le point Q sera le milieu de BO, et par suite, la limite du point Q, dans le cas des cordes égales, est le milieu du rayon de courbure. Mais si maintenant l'on transporte parallèlement BO au milieu de BC, en EN, on a, dans le cas des cordes égales, QN infiniment peu différent de DQ. Donc DN diffère infiniment peu de AL, d'où l'on conclut que la limite du point N, ou le centre du cercle osculateur, coïncide avec la limite du point L, ou avec le centre de courbure.

Dans le cas des cordes inégales, on a, d'après ce que nous avons vu, en appelant h, h_1 les projections des deux cordes sur l'axe des x, et négligeant les infiniment petits du second ordre,

$$OAL = \frac{1}{2}\,\frac{hy''}{1+y'^2} = OJL, \quad \text{d'où} \quad LJ = LB = \rho.$$

Mais, h_1 étant différent de h,

$$OBL = \frac{1}{2}\frac{h_1 y''}{1+y'^2}, \quad \text{d'où} \quad \frac{OJ}{OB} = \frac{OBL}{OJL} = \frac{h_1}{h},$$

$$OJ = \frac{2h_1}{h+h_1}\rho, \quad AO = 2\left(1 - \frac{h_1}{h+h_1}\right)\rho = \frac{2h}{h+h_1}\rho;$$

par conséquent, $BQ = \dfrac{h}{h+h_1}\rho$. Mais

$$\frac{QN}{DQ} = \frac{IK}{DK} = \frac{BE}{BD} = \frac{\frac{1}{2}h_1}{\frac{1}{2}h} = \frac{h_1}{h},$$

d'où, à cause de $DQ = BQ$,

$$NQ = \frac{h_1}{h}\cdot\frac{h}{h+h_1}\rho = \frac{h_1}{h+h_1}\rho,$$

d'où enfin $DN = \left(1 + \dfrac{h_1}{h}\right) DQ = \rho$. Donc, dans tous les cas, le cercle osculateur coïncide avec le cercle de courbure.

Si les points D, E n'étaient plus les milieux des cordes, mais que l'on eût, plus généralement, $AD = \mu . AB$, $BE = \nu . BC$, alors, en posant, pour abréger, $BC = \alpha . AB$, d'où $h_1 = \alpha h$, on trouverait de la même manière

$$DN = \frac{2(1 - \mu + \nu\alpha)}{1+\alpha}\rho.$$

Dans le cas des cordes égales, $\alpha = 1$; on aurait $DN = \rho$ pour $\mu = \nu$, c'est-à-dire pour $AD = BE$. En prenant $\mu = \nu = \dfrac{1}{2}$, on aurait $DN = \rho$, quel que fût α. Pour α quelconque, il faudrait, pour que l'on eût $DN = \rho$, que μ et ν satisfissent à la condition

$$1 - 2\mu = \alpha(1 - 2\nu).$$

573. Si deux courbes ont, en un point M, un contact d'ordre impair, la différence $Y_1 - y_1$ de leurs ordonnées pour l'abscisse $x + h$ est proportionnelle [567] à une puissance *paire* de h, et par suite elle est de même signe de part et d'autre du point de contact. Les deux courbes ne se traversent pas mutuellement. C'est le cas d'une droite ou d'un cercle simplement tangents à une courbe.

Si l'ordre de contact est pair, la différence $Y_1 - y_1$ est proportionnelle à une puissance *impaire* de h, et change de signe,

lorsqu'on passe d'un côté à l'autre du point de contact. Les deux courbes se traversent donc mutuellement. C'est le cas de la tangente à une courbe en un point d'inflexion; c'est aussi le cas du cercle osculateur à une courbe en un point quelconque.

On voit *a priori* que la courbe doit traverser son cercle osculateur, puisque, d'un côté du point de contact, la courbure doit aller en augmentant, et devenir plus grande que celle du cercle osculateur, tandis que le contraire a lieu de l'autre côté du point de contact.

574. Il y a exception pour les points où la courbure est un maximum (ou un minimum). En ces points, elle va en décroissant (ou en croissant) des deux côtés du point de contact, et par suite la courbe est, de part et d'autre, extérieure (ou intérieure) au cercle de courbure. Elle doit avoir avec ce cercle un contact d'ordre impair, lequel doit être, par suite, du troisième ordre au moins.

Ce cas doit évidemment se présenter toutes les fois que la courbe est rencontrée par un axe de symétrie, comme cela a lieu, par exemple, aux quatre sommets d'une ellipse.

C'est ce que l'on peut vérifier directement par l'analyse. La condition $d\rho = 0$ donne

$$y''' = \frac{3y'y''^2}{1+y'^2}.$$

Or, en différentiant trois fois l'équation du cercle osculateur,

$$(X-\xi)^2 + (Y-\eta)^2 = \rho^2,$$

par rapport à ses coordonnées courantes X, Y, il vient

$$X-\xi+(Y-\eta)Y' = 0,$$
$$1+Y'^2+(Y-\eta)Y'' = 0,$$
$$3Y'Y''+(Y-\eta)Y''' = 0,$$

d'où l'on tire

$$Y''' = \frac{3Y'Y''^2}{1+Y'^2}.$$

Comme on a déjà $Y' = y'$, $Y'' = y''$, il en résulte $Y''' = y'''$; donc le contact de la courbe avec son cercle de courbure de rayon maximum ou minimum est du troisième ordre au moins.

§ VI.

DÉVELOPPÉES ET DÉVELOPPANTES DES COURBES PLANES.

575. Nous avons vu [551] que le centre de courbure d'une courbe plane n'est autre chose que la limite du point de rencontre de deux normales infiniment voisines. Donc le lieu des centres de courbure est le lieu des limites des intersections de deux normales infiniment voisines, ou, comme on dit pour abréger, le *lieu des intersections successives* des normales à la courbe proposée. Ce lieu s'appelle, pour des raisons que nous verrons tout à l'heure, la *développée* de la courbe proposée.

D'après ce que nous avons vu [556, 557], l'intersection de deux normales infiniment voisines est déterminée par les équations

$$(1) \qquad (\xi - x)\,dx + (\eta - y)\,dy = 0,$$

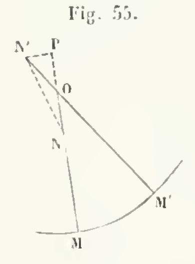
$$(2) \qquad (\xi - x)\,d^2x + (\eta - y)\,d^2y = ds^2.$$

En éliminant la variable indépendante, dont x et y sont fonctions, entre ces deux équations, on aura l'équation entre ξ et η qui représentera la développée.

576. La normale à la courbe est tangente à la développée.

Soient, en effet, N, N′ (*fig.* 55) deux centres de courbure infi-

Fig. 55.



niment voisins, situés sur les normales MN, M′N′, et soit O l'intersection de ces normales. Le point O a pour limite ou le point N ou le point N′, suivant que l'on fait tendre le point M′ de la courbe vers le point M, ou le point M vers le point M′. Dans le premier cas, on fait varier l'abscisse de M dans un certain sens; dans le

second, on la fait varier en sens contraire. La distance MO étant une fonction continue de l'abscisse x' de M', la différence MO — NO changera généralement de signe avec la différence $x' - x$. Si donc on projette tous les points de la figure sur l'une des normales ou sur toute autre direction infiniment peu inclinée sur chacune d'elles, la projection de O s'approchera ou s'éloignera de celle de M suivant que M' passera d'un côté ou de l'autre de M. Par conséquent O doit être plus près de la courbe MM' que l'un des points N, N', et plus loin de la courbe que l'autre. Il est aisé d'en conclure que le triangle NON' a deux angles aigus NN'O, N'NO, dont la somme MOM' est infiniment petite, et qui par suite sont l'un et l'autre infiniment petits, ainsi que le côté NN'; il en résulte que N' est distant d'une quantité du second ordre de la droite MNO. Donc [504] MN est tangente à la courbe NN'.

On peut encore le voir analytiquement. Pour cela, différentions l'équation (1) par rapport à tout ce qui varie lorsqu'on passe du point N au point N', c'est-à-dire par rapport à ξ, η et à x, y, dx, dy. Il viendra, en ayant égard à l'équation (2),

$$d\xi\, dx + d\eta\, dy = 0,$$

ce qui montre que la tangente à la développée au point (ξ, η) est perpendiculaire à la tangente à la courbe proposée au point (x, y). Elle coïncide donc avec la normale MN à la courbe proposée.

577. Les deux droites M'N', NN' faisant des angles infiniment petits avec MN, tout segment pris sur une de ces droites différera, d'une quantité infiniment petite du second ordre par rapport à lui-même, de sa projection sur MN. De plus, l'angle de la corde MM' avec MN différant infiniment peu d'un angle droit, la projection du point M' sur MN sera à une distance infiniment petite du second ordre du point M. On aura donc, aux quantités près du second ordre, M'N' = MP, NN' = NP, d'où NN' = M'N' — MN, et comme NN' diffère d'un infiniment petit d'ordre supérieur au premier de l'arc NN' de la développée, on en conclut que l'accroissement infiniment petit de l'arc de développée est égal à la différence des deux rayons de courbure qui aboutissent à ses extrémités.

Il est facile de démontrer analytiquement cette proposition.

Soit $d\sigma = \sqrt{d\xi^2 + d\eta^2}$ l'élément d'arc de la développée, compté, pour fixer les idées, dans le sens du prolongement du rayon de courbure au delà du point N. On a alors, $\frac{d\xi}{d\sigma}$ et $\frac{d\eta}{d\sigma}$ étant les cosinus des angles que fait la direction MN avec les axes,

$$\xi - x = \rho\frac{d\xi}{d\sigma}, \quad \eta - y = \rho\frac{d\eta}{d\sigma}.$$

Substituant ces valeurs dans la différentielle de l'équation

$$(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 = \rho^2,$$

laquelle est, en ayant égard à l'équation (1),

$$(\xi - x)\,d\xi + (\eta - y)\,d\eta = \rho\,d\rho,$$

il vient $\rho\frac{d\sigma}{d\sigma} = \rho\,d\rho$, c'est-à-dire $d\sigma = d\rho$.

Si l'on avait compté l'accroissement de l'arc positivement dans le sens NM, on aurait eu, au contraire, $d\sigma = -d\rho$.

578. De la relation $d\sigma = \pm d\rho$ il résulte, en désignant par ρ_0, ρ_1 les rayons de courbure correspondants aux extrémités d'un arc σ de la développée, que l'on a $\sigma = \pm(\rho_1 - \rho_0)$. On voit par là que la développée d'une courbe donnée par son équation est toujours une courbe *rectifiable*, c'est-à-dire que la longueur de son arc peut se calculer par de simples différentiations, et est toujours exprimable au moyen des fonctions élémentaires, lorsque les coordonnées de la courbe le sont. Nous avons vu, par exemple [540, I], que la courbe lieu des centres de courbure de la parabole [566, I] est rectifiable.

Il s'ensuit de là que, si l'on enroule sur le lieu des centres de courbure un fil flexible et inextensible, et qu'on le déroule ensuite en le tenant toujours tendu, le point du fil qui se trouvait primitivement sur la courbe donnée ne cessera pas de se mouvoir sur cette courbe, qui sera ainsi engendrée par le *développement* du lieu des centres de courbure. De là le nom de *développée* que nous avons donné à ce lieu.

La courbe proposée est dite, réciproquement, la *développante* du lieu de ses centres de courbure.

Chaque point du fil que l'on déroule décrit une courbe normale à ce fil, comme on le démontrerait facilement, et ayant en chaque point pour centre de courbure le même point de contact du fil. Donc toutes ces courbes ont même développée; et réciproquement une même développée donnée a une infinité de développantes.

La distance de deux développantes d'une même courbe, comptée sur leur normale commune, est constante. On dit, pour cette raison, que toutes les développantes d'une même courbe sont des *courbes parallèles*.

579. Soient $f(\xi, \eta) = 0$ l'équation de la développée, et σ l'arc de cette développée, compté à partir d'une origine quelconque; $\sigma + C$ sera le rayon de courbure d'une développante quelconque, C désignant une constante arbitraire. De plus, $\frac{d\xi}{d\sigma}$, $\frac{d\eta}{d\sigma}$ sont les cosinus des angles que fait avec les axes la tangente à la développée, dirigée dans le sens des σ croissants. Si donc on considère l'arc σ comme croissant dans le sens parcouru par le point de contact de la tangente mobile, les projections du rayon de courbure de la développante sur les axes coordonnés seront

$$x - \xi = -(\sigma + C)\frac{d\xi}{d\sigma}, \quad y - \eta = -(\sigma + C)\frac{d\eta}{d\sigma}.$$

Si l'on considérait σ comme décroissant dans le sens parcouru par le point de contact, il faudrait prendre les seconds membres de ces équations en signe contraire, c'est-à-dire avec le signe $+$.

Exemple. — Cherchons les développantes de la chaînette représentée par les équations

$$\xi = a\varphi, \quad \eta = a\operatorname{Ch}\varphi.$$

On a [566, II], $d\sigma = a\operatorname{Ch}\varphi\, d\varphi$, d'où $\sigma = a\operatorname{Sh}\varphi + C$; ensuite $\frac{d\xi}{d\sigma} = \frac{1}{\operatorname{Ch}\varphi}$, et $\frac{d\eta}{d\sigma} = \operatorname{Th}\varphi$. Les développantes de la chaînette sont donc représentées généralement par les équations

$$x = a\left[\varphi \mp (\operatorname{Sh}\varphi + C)\frac{1}{\operatorname{Ch}\varphi}\right], \quad y = a[\operatorname{Ch}\varphi \mp (\operatorname{Sh}\varphi + C)\operatorname{Th}\varphi].$$

Si l'on suppose l'arc σ compté à partir du sommet, pour lequel

$\varphi = 0$, et croissant dans le sens du mouvement du point de contact, on a, en faisant $C = 0$, et prenant le signe supérieur,

$$x = a(\varphi - \text{Th}\,\varphi), \quad y = \frac{a}{\text{Ch}\,\varphi},$$

équations qui représentent la courbe aux tangentes égales ou la tractoire [510, III].

580. Le rayon de courbure ρ_1 de la développée est égal à l'élément d'arc $d\sigma$ divisé par l'angle de contingence de la développée, lequel est évidemment égal à celui $d\tau$ de la développante. On a donc

$$\rho_1 = \frac{d\sigma}{d\tau} = \frac{d\rho}{d\tau} = \frac{\rho\, d\rho}{ds}.$$

Donc on a la proportion

$$\frac{\rho_1}{\rho} = \frac{d\sigma}{ds},$$

c'est-à-dire que les rayons de courbure des deux courbes sont proportionnels aux éléments d'arc correspondants.

On peut encore le voir autrement. On a, en effet [554],

$$\rho_1 = \frac{d\sigma^3}{d\xi^2\, d\dfrac{d\eta}{d\xi}}.$$

Or on a, d'après ce qui précède,

$$d\sigma = d\rho, \quad \frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{dx}{dy} = -\frac{1}{y'}, \quad \frac{d\xi}{d\sigma} = \frac{dy}{ds},$$

d'où

$$d\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{dy'}{y'^2}.$$

Donc

$$\rho_1 = d\rho\, \frac{ds^2}{dy^2}\, \frac{y'^2}{dy'} = \frac{d\rho}{ds}\, \frac{ds^3}{dx^2\, dy'},$$

ou enfin

$$\rho_1 = \frac{\rho\, d\rho}{ds}.$$

§ VII.

DES COURBES ENVELOPPES.

581. Une équation

$$(1) \qquad F(x, y, C) = 0,$$

renfermant un paramètre arbitraire C, représente une infinité de courbes, lorsqu'on donne à ce paramètre une série de valeurs différentes. Il peut arriver alors que la courbe variable parcoure le plan tout entier, comme cela a lieu pour les cercles concentriques représentés par l'équation $x^2+y^2=C^2$. D'autres fois, la courbe laissera une portion du plan dans laquelle elle ne pénétrera pas. Ainsi le cercle variable $x^2+y^2-2C(x+y)+C^2=0$, tangent aux deux axes coordonnés, ne se mouvra que dans l'angle des coordonnées positives et dans l'angle opposé, et ne pénétrera pas dans les deux autres angles.

Si l'on suppose que le passage de la courbe mobile laisse une trace sur la partie du plan parcourue, la limite de l'espace occupé par ces traces s'appellera l'*enveloppe* de la courbe mobile. Dans le dernier exemple, cette enveloppe se compose de l'ensemble des deux axes coordonnés.

Chacun des points de cette courbe limite lui sera commun avec quelqu'une des courbes variables. Mais la courbe variable ne pourra couper l'enveloppe en ce point commun, sans quoi elle entrerait dans la partie du plan où, par hypothèse, elle ne doit pas pénétrer. Donc l'enveloppe est généralement tangente aux diverses courbes (1), auxquelles on donne le nom d'*enveloppées*.

582. On peut encore définir autrement les courbes enveloppes. Si l'on considère deux courbes de la série (1), correspondantes à deux valeurs infiniment voisines C, C_1 du paramètre variable, elles se couperont généralement en un point M (*fig.* 56), qui tendra vers une certaine limite μ, lorsque C_1 tendra vers C. Lorsqu'on fera varier C, le point μ décrira une certaine ligne qu'on appelle le *lieu des intersections successives* de la courbe variable.

Supposons que la fonction $F(x, y, C)$ soit uniforme et continue par rapport à chacune des quantités x, y, C. Les coordonnées du

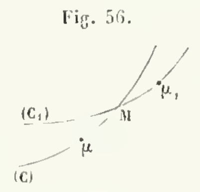
point d'intersection de la courbe (C) avec (C_1) varieront d'une manière continue en même temps que le paramètre C_1, et généralement à des accroissements infiniment petits de signes contraires donnés à C_1 correspondront des accroissements de signes contraires de chacune des coordonnées x, y de ce point.

De plus, la quantité

$$y' = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

étant supposée une fonction continue de C, les valeurs de y' correspondantes aux deux courbes infiniment voisines qui se coupent

Fig. 56.



en M seront infiniment peu différentes, et, par suite, l'angle des tangentes à ces courbes en ce point sera infiniment petit. Il en sera de même de l'angle de deux cordes infiniment petites, telles que μM, $M\mu_1$.

On conclut de ces remarques que, si μ, μ_1 sont les deux limites du point M, lorsqu'on fait tendre soit C_1 vers C, soit C vers C_1, les projections des droites $M\mu$, $M\mu_1$ sur une direction infiniment voisine des tangentes en M seront de sens contraire. Donc le triangle $\mu M \mu_1$ a deux angles infiniment petits en μ et μ_1, puisque la somme de ces angles est l'angle des cordes μM, $M\mu_1$.

Or les côtés μM, $\mu\mu_1$ de ce triangle ont pour limites respectives les tangentes à la courbe C et au lieu des points μ. Donc ces limites coïncident entre elles, et, par suite, le lieu des intersections successives est tangent, en chacun de ces points, à la position de la courbe variable qui passe par ce point.

583. Voyons maintenant comment, en partant de chacune de ces définitions, on peut trouver l'équation de l'enveloppe.

Nous supposerons d'abord, pour plus de simplicité, que l'équation de l'enveloppée (1) soit rationnelle et entière en x, y et C, ou du moins que son premier membre soit une fonction jouissant, comme les fonctions rationnelles et entières, de la propriété d'être finie, ainsi que ses dérivées partielles, pour toutes les valeurs finies de x, y, C.

Cherchons à déterminer l'enveloppe, d'après sa propriété d'être tangente à toutes les enveloppées. Pour chaque valeur du paramètre, une des enveloppées vient à son tour toucher l'enveloppe. Il y a donc une dépendance entre la valeur de C et l'abscisse du point de contact correspondant, de sorte que la valeur qu'il faut donner à C pour que l'enveloppée vienne passer en un point de l'enveloppe d'abscisse $= x$ est une certaine fonction de x. On aura donc successivement tous les points de l'enveloppe, en remplaçant, dans l'équation de l'enveloppée, C par une fonction convenable de x (ou de x et de y). Nous déterminerons cette fonction par la condition qu'au point commun l'enveloppe et l'enveloppée aient même tangente, c'est-à-dire que le y' soit le même pour C fonction de x que pour C constant.

Or la valeur de y', dans le cas de C constant, est donnée par l'équation

$$\frac{\partial F}{\partial x} + y' \frac{\partial F}{\partial y} = 0;$$

dans le cas de C fonction de x, on a

$$\frac{\partial F}{\partial x} + y' \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{dC}{dx} \frac{\partial F}{\partial C} = 0.$$

Pour que les valeurs de y' tirées de ces deux équations soient les mêmes, il faut que l'on ait

$$\frac{dC}{dx} \frac{\partial F}{\partial C} = 0,$$

condition à laquelle on satisfait soit en posant $\frac{dC}{dx} = 0$, ou $C = \text{const.}$, ce qui correspondrait à une enveloppée; soit en posant

$$(2) \qquad \frac{\partial F}{\partial C} = 0.$$

Cette dernière équation détermine pour C la valeur variable qui correspond à l'enveloppe. En éliminant donc C entre les équations (1) et (2), on aura l'équation de l'enveloppe.

La valeur de y', dans le cas de C variable, peut s'écrire sous la forme

$$(3) \qquad y' = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} - \frac{\frac{dC}{dx}\cdot\frac{\partial F}{\partial C}}{\frac{\partial F}{\partial y}}.$$

Son second terme, par lequel elle diffère de la valeur correspondante à C constant, peut s'annuler non-seulement en supposant $\frac{\partial F}{\partial C} = 0$, mais encore en supposant $\frac{\partial F}{\partial y} = \infty$. Cette supposition, inadmissible dans le cas, que nous avons considéré d'abord, de $F(x, y, C)$ entière et rationnelle, peut, au contraire, donner des solutions lorsque $F(x, y, C)$ est de forme quelconque.

Remarquons que, sauf le cas où l'on aurait $y' = 0$ en tout point de l'enveloppe, et où, par suite, celle-ci serait une droite parallèle aux x, la supposition $\frac{\partial F}{\partial y} = \infty$ entraîne en même temps l'équation $\frac{\partial F}{\partial x} = \infty$.

On voit de plus que, bien que le second terme de la valeur (3) de y' soit nul en chaque point de l'enveloppe, il n'en sera pas de même, en général, de sa dérivée; d'où il s'ensuit que la valeur de y'' n'est pas généralement la même pour l'enveloppe et l'enveloppée, de sorte que ces deux courbes n'ont entre elles qu'un contact du premier ordre. Il peut cependant y avoir des exceptions, dont nous nous occuperons plus tard.

584. Cherchons maintenant à déterminer l'enveloppe comme lieu des intersections successives de l'enveloppée.

Si nous considérons les deux enveloppées correspondantes aux valeurs C et $C + h$ du paramètre, leur intersection sera donnée par l'ensemble des équations

$$F(x, y, C) = 0, \quad F(x, y, C + h) = 0,$$

dont la dernière peut s'écrire

$$F(x, y, C) + h F'_C(x, y, C + \theta h) = 0,$$

ou simplement, en ayant égard à la première,

$$F'_C(x, y, C + \theta h) = 0.$$

Si l'on suppose maintenant h infiniment petit, on voit que la limite de l'intersection de deux enveloppées infiniment voisines est donnée par le système des deux équations

$$F(x, y, C) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial C} = 0.$$

On aura le lieu de ces intersections limites, en éliminant C entre ces deux équations, ce qui s'accorde avec la règle du numéro précédent.

585. Pour qu'il y ait intersections successives, il faut qu'à deux valeurs différentes du paramètre, C et $C + h$, puisse répondre un même système de valeurs de x et de y. Si donc l'équation était résolue par rapport à C sous la forme $C = f(x, y)$, il faudrait que le second membre $f(x, y)$ fût susceptible de deux valeurs au moins, f_1 et f_2, dont l'une serait égalée à C, l'autre à $C + h$: par suite, la différence $f_2 - f_1$ de ces valeurs serait égale à h. En faisant maintenant $h = 0$, on a, pour l'équation de l'enveloppe,

$$f_2 - f_1 = 0;$$

donc l'équation de l'enveloppe n'est autre chose que la condition qui rend égales deux racines de l'équation $F(x, y, C) = 0$, où C est l'inconnue.

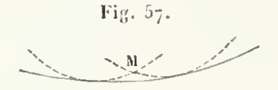
Si la fonction F est entière et rationnelle par rapport à C, cette condition d'égalité des racines est donnée par l'équation $\frac{\partial F}{\partial C} = 0$, et l'on est ainsi ramené à la règle des numéros précédents.

On voit d'ailleurs que le point de contact de l'enveloppe avec chaque enveloppée partage celle-ci en deux régions, et le point de rencontre de deux enveloppées infiniment voisines appartient à la branche postérieure de l'une et à la branche antérieure de l'autre. Ces deux branches (*fig.* 57) correspondent, pour chaque courbe, à des déterminations différentes de C en fonction de x et de y, sans quoi les branches de deux courbes voisines ne pourraient se rencontrer en M; et ces deux déterminations se confondent,

lorsqu'à la limite le point M vient sur l'enveloppe. On peut être ainsi conduit *a priori* à poser l'équation (2) par la considération de l'égalité des racines de l'équation (1) en C.

Ainsi cette règle de l'égalité des racines convient non-seulement

Fig. 57.



au cas de la fonction $F(x, y, C)$ entière et rationnelle, mais encore au cas où cette équation serait résolue par rapport à C, et où la règle du n° 582 conduirait à l'équation absurde $1 = 0$.

586. Si l'on considère C comme une fonction de x et de y déterminée par l'équation (1), les dérivées partielles de cette fonction ont pour valeurs

$$\frac{\partial C}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial C}}, \quad \frac{\partial C}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial C}}.$$

Dans le cas où $F(x, y, C)$ est rationnelle et entière, le dénominateur $\frac{\partial F}{\partial C}$ est nul, sans que les numérateurs le soient. Donc on a, en chaque point de l'enveloppe, les deux équations

$$\frac{\partial C}{\partial x} = \infty, \quad \frac{\partial C}{\partial y} = \infty.$$

Si l'on vient maintenant à changer la forme de l'équation $F(x, y, C) = 0$, la dépendance entre x, y et C n'étant pas altérée, les dérivées partielles de C ne devront pas changer de valeurs, et, par suite, ne cesseront pas d'être infinies en chaque point de l'enveloppe. Si donc le changement de forme de l'équation $F = 0$ fait perdre des solutions à l'équation $\frac{\partial F}{\partial C} = 0$, ces solutions devront se retrouver dans les équations

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \infty, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \infty,$$

que nous avons déjà rencontrées au n° 583, et qui sont la conséquence l'une de l'autre, sauf le cas où l'enveloppe serait une droite parallèle à l'un des axes coordonnés.

587. Si, au lieu d'un seul paramètre C, l'équation de la courbe variable contenait deux paramètres C, C_1, liés entre eux par une équation de condition $\varphi(C, C_1) = 0$, on procéderait de la même manière, en considérant, dans la différentiation par rapport à C, C_1 comme une fonction de C, dont la dérivée $\frac{dC_1}{dC}$ s'obtiendrait en différentiant l'équation de condition.

On procéderait encore d'une manière analogue, si l'équation de l'enveloppée contenait n paramètres, liés entre eux par $n-1$ équations de condition.

588. *Exemples.* — I. Soit le cercle variable, représenté par l'équation

$$(1) \qquad (x - C)^2 + y^2 = 2kC.$$

En différentiant par rapport à C, il vient

$$-(x - C) = k, \quad \text{d'où} \quad C = x + k.$$

Substituant cette valeur dans l'équation (1), on a, pour l'enveloppe des cercles représentés par cette équation, la parabole

$$(2) \qquad y^2 - 2kx = k^2.$$

Si, au lieu de prendre l'équation du cercle sous sa forme entière et rationnelle, on la résout par rapport à C, ce qui donne

$$C = x + k \pm \sqrt{k^2 + 2kx - y^2},$$

en égalant entre elles les deux valeurs de C, on retrouve l'équation (2) de l'enveloppe.

On obtient encore la même équation, en posant

$$\frac{\partial C}{\partial x} = 1 \pm \frac{k}{\sqrt{k^2 + 2kx - y^2}} = \infty, \quad \text{ou} \quad \frac{\partial C}{\partial y} = \mp \frac{y}{\sqrt{k^2 + 2kx - y^2}} = \infty,$$

équations dont l'une entraîne l'autre.

On aurait pu encore différentier C comme une fonction implicite

de x et de y, déterminée par l'équation (1), ce qui aurait donné

$$\frac{\partial C}{\partial x} = \frac{x - C}{x - C + k} = \infty, \quad \text{ou} \quad \frac{\partial C}{\partial y} = \frac{y}{x - C + k} = \infty,$$

d'où $C = x + k$, comme dans la première méthode.

II. Soit le cercle mobile

$$x^2 + y^2 - 2C(x + y) + C^2 = 0.$$

L'équation $\frac{\partial F}{\partial C} = 0$ donne $C = x + y$, d'où, en substituant, on déduit l'équation de l'enveloppe $xy = 0$, qui représente les deux axes coordonnés.

En résolvant par rapport à C, ce qui donne

$$C = x + y \pm \sqrt{2xy},$$

et égalant les deux racines, on serait arrivé au même résultat.

En prenant la règle du n° 586, on aurait

$$\frac{\partial C}{\partial x} = 1 \pm \sqrt{\frac{y}{2x}} = \infty, \quad \text{ou} \quad \frac{\partial C}{\partial y} = 1 \pm \sqrt{\frac{x}{2y}} = \infty.$$

La première de ces équations donne $x = 0$, la seconde $y = 0$. Ainsi chacune donne une partie seulement de l'enveloppe. Cela tient à ce que cette enveloppe se compose de deux droites parallèles l'une aux x, l'autre aux y [583, 586].

III. Cherchons l'enveloppe des cercles qui ont pour diamètres les cordes de l'ellipse

$$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} = 1,$$

parallèles à l'axe $2b$ de cette ellipse. L'équation d'un de ces cercles sera

$$(x - \alpha)^2 + y^2 = \beta^2.$$

En différentiant ces deux équations par rapport à α, dont β est une fonction, il vient

$$\frac{\alpha\, d\alpha}{a^2} + \frac{\beta\, d\beta}{b^2} = 0, \quad (x - \alpha)\, d\alpha + \beta\, d\beta = 0,$$

d'où, en éliminant $\frac{d\beta}{d\alpha}$,

$$\frac{x-\alpha}{b^2} = \frac{\alpha}{a^2}, \quad \alpha = \frac{a^2 x}{a^2+b^2}, \quad x-\alpha = \frac{b^2 x}{a^2+b^2},$$

et, par suite,

$$\frac{\beta^2}{b^2} = 1 - \frac{a^2 x^2}{(a^2+b^2)^2}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation du cercle, on a, pour l'enveloppe,

$$\frac{x^2}{a^2+b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

équation d'une ellipse de même petit axe que la proposée, et ayant pour grand axe le diamètre du cercle directeur de cette ellipse.

La valeur maximum de x étant $\sqrt{a^2+b^2}$, et la relation entre x et α pouvant s'écrire sous la forme $\frac{x}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{\alpha}{a}\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}$, il s'ensuit de là que, pour que $\frac{x}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ne surpasse pas l'unité, il ne suffit pas que α soit $< a$: il faut encore que α soit $\leq a.\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Pour tous les cercles qui correspondent à des valeurs de α comprises entre $\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et a, il n'y a plus d'intersection mutuelle des cercles variables.

IV. Soit la tangente à une courbe $f(x, y) = 0$, représentée par l'équation

$$(1) \qquad (\xi - x)\,dy - (\eta - y)\,dx = 0.$$

Ici x et y sont des paramètres, liés entre eux par l'équation de la courbe donnée, et qui, comme $\frac{dy}{dx}$, sont fonctions de la variable indépendante. Pour avoir l'enveloppe de cette tangente, différentions l'équation (1) par rapport à cette variable indépendante. Il vient

$$(2) \qquad (\xi - x)\,d^2y - (\eta - y)\,d^2x = 0.$$

Ces équations (1) et (2) donnent pour $\xi - x$ et $\eta - y$ des valeurs nulles, à moins que le déterminant

$$\begin{vmatrix} dx & dy \\ d^2x & d^2y \end{vmatrix}$$

ne soit nul. On aura donc, en général, $\xi = x$, $\eta = y$, ce qui donne pour enveloppe le lieu des points de contact, c'est-à-dire la courbe elle-même. Ainsi une courbe est l'enveloppe de ses tangentes.

Dans le cas où le déterminant serait nul, on aurait

$$\frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^2} = d\frac{dy}{dx} = 0, \quad \frac{dy}{dx} = C, \quad y = Cx + C';$$

ce serait le cas où la courbe proposée se réduirait à une droite, avec laquelle se confondraient toutes ses tangentes.

V. Soit la normale à une courbe

$$(\xi - x)\,dx + (\eta - y)\,dy = 0.$$

Pour avoir son enveloppe, différentions par rapport à la variable indépendante dont x et y sont fonctions. Il viendra

$$(\xi - x)\,d^2x + (\eta - y)\,d^2y = ds^2.$$

Ces deux équations ne sont autre chose que celles qui nous ont servi à trouver la développée de la courbe proposée [575]. En effet, par sa définition même, la développée d'une courbe n'est autre chose que l'enveloppe des normales à cette courbe.

§ VIII.

POINTS SINGULIERS DES COURBES PLANES.

389. Les points pour lesquels les courbes présentent des particularités qui mettent les règles générales précédentes en défaut sont de deux sortes. Les uns dépendent simplement du système de coordonnées auquel on rapporte la courbe, et varient avec ce système. Tels sont les points de maximum ou de minimum de l'abscisse ou de l'ordonnée. On peut faire rentrer ces points dans la règle générale par un changement du système de coordonnées, en échangeant, par exemple, entre eux les axes des x et des y.

Les autres tiennent à la forme géométrique de la courbe, et ne cessent pas d'être des points exceptionnels, à quelque système de coordonnées que cette courbe soit rapportée. C'est à ces derniers points que l'on donne spécialement le nom de *points singuliers*.

Les principales espèces de points singuliers que l'on rencontre dans les courbes planes sont, outre les *points d'inflexion*, dont nous nous sommes occupés dans le § III : 1° les points *multiples*; 2° les points *isolés* ou *conjugués*; 3° les points de *rebroussement*; 4° les points d'*arrêt* ou de *rupture*; 5° les points *saillants* ou *anguleux*.

590. Une courbe algébrique, dont l'équation a été ramenée à la forme entière et rationnelle, ou du moins dans l'équation de laquelle les radicaux sont pris dans toute leur généralité algébrique, ne peut présenter de point d'arrêt, c'est-à-dire de point où vienne se terminer brusquement une seule branche de courbe.

En effet, une branche de courbe se termine pour une certaine abscisse, lorsque l'équation en y, dont les coefficients sont des fonctions de x, admet une racine réelle d'un côté de cette abscisse, imaginaire de l'autre. Or une équation algébrique à coefficients réels n'admet des racines complexes que par paires; si bien que, lorsqu'une racine, par la variation des coefficients de l'équation, passe du réel à l'imaginaire, la racine conjuguée doit passer en même temps du réel à l'imaginaire. Au moment précis où les racines conjuguées $u \pm v\sqrt{-1}$ se changent en racines réelles, les quantités u et v variant d'une manière continue, $v\sqrt{-1}$ s'évanouit en passant de l'imaginaire au réel, et les deux racines deviennent égales. Donc au point même où s'arrête la première branche de courbe vient se terminer une seconde branche, qui fait la continuation de la première, et généralement ce point répond à un simple maximum ou minimum de l'abscisse, qui changerait avec la direction des axes, et qui, en lui-même, ne se distingue en rien des autres points.

Il en serait de même si l'équation était résolue, les radicaux étant pris avec toute leur généralité; car alors elle équivaudrait complétement à l'équation délivrée de radicaux.

591. Une courbe algébrique, dans les mêmes circonstances que

ci-dessus, ne peut présenter non plus de point saillant, c'est-à-dire, de point où viennent se terminer deux branches de courbe dont les tangentes feraient entre elles un angle fini.

En effet, si, entre l'équation de la courbe et sa différentielle, on élimine y, il en résultera une équation entre x et y', qui donnera, pour chaque abscisse, le coefficient angulaire de la tangente, et qui sera algébrique, comme l'équation primitive entre x et y. Si l'on construit la courbe dont y' est l'ordonnée, cette courbe ne peut avoir de point d'arrêt, d'après ce qu'on vient de voir. Donc la courbe primitive ne peut avoir non plus de point saillant, où la direction de la tangente varierait brusquement d'une quantité finie.

Donc les points d'arrêt et les points saillants ne peuvent se trouver dans les courbes algébriques, tant qu'on n'y particularise pas la signification des radicaux.

592. Il en serait autrement, si l'on restreignait la généralité des radicaux, en réduisant les radicaux d'ordre pair à leur valeur arithmétique. Dans ce cas, les lignes représentées par les équations

$$y = \sqrt{x}, \quad y = \frac{x}{\sqrt{x^2}},$$

présenteraient des points d'arrêt, et les lignes représentées par les équations

$$y = \sqrt{x^2}, \quad y = \sqrt{\left(\sqrt{a^2 - x^2} - b\right)^2}$$

offriraient des points saillants.

Ces deux sortes de points singuliers se rencontrent dans les courbes qui représentent certaines fonctions discontinues, exprimées par des intégrales définies, comme nous en avons vu des exemples aux n°s 457, 480, 483. On les trouve encore dans certaines courbes représentées par des équations transcendantes. Par exemple, les courbes

$$y = \frac{1}{\log x}, \quad y = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$$

ont des points d'arrêt pour $x = 0$; les courbes

$$y = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}, \quad y = x \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{x}$$

ont, pour $x = 0$, des points saillants.

593. Passons maintenant à la recherche des autres espèces de points singuliers, que peuvent présenter les courbes algébriques, et parlons d'abord des *points multiples*. Soit

$$f(x, y) = 0$$

l'équation de la courbe, supposée mise sous forme entière et rationnelle, si elle est algébrique; sinon, nous supposerons que son premier membre soit une fonction transcendante jouissant des propriétés des fonctions entières, qui ne dépendent pas de leur degré.

Si l'on donne à x et à y des accroissements infiniment petits h, k, et que l'on désigne généralement par ε_n un infiniment petit d'ordre n, on aura [339]

$$\begin{aligned} f(x+h, y+k) &= f(x,y) + \varepsilon_1 \\ &= f(x,y) + (h\,D_x + k\,D_y) f(x,y) + \varepsilon_2 \\ &= f(x,y) + (h\,D_x + k\,D_y) f(x,y) + \frac{1}{2}(h\,D_x + k\,D_y)^2 f(x,y) + \varepsilon_3, \end{aligned}$$

et ainsi de suite, suivant que l'on voudra pousser plus ou moins loin le développement.

Supposons maintenant que (x, y) soit un point de la courbe; alors $f(x, y) = 0$, et l'on aura, pour un point $(x + h, y + k)$ infiniment voisin de (x, y),

$$(10) \qquad 0 = h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y} + \varepsilon_2.$$

Imaginons qu'au point (x, y) passent deux branches de courbe, non tangentes entre elles. Alors, pour la même valeur de h, on aura deux valeurs de k, différant entre elles d'un infiniment petit du premier ordre [567]. Soient k, k' ces valeurs; on devra avoir,

avec l'équation (1), l'équation

$$o = h\frac{\partial f}{\partial x} + k'\frac{\partial f}{\partial y} + \varepsilon'_2.$$

Retranchant l'une de l'autre ces deux équations, et divisant par h, il vient

$$o = \frac{k'-k}{h}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\varepsilon'_2 - \varepsilon_2}{h}.$$

La limite de $\frac{k'-k}{h}$ étant finie et celle de $\frac{\varepsilon'_2 - \varepsilon_2}{h}$ nulle, on en conclut $\frac{\partial f}{\partial y} = o$. L'équation (1) se réduisant alors à

$$o = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\varepsilon_2}{h},$$

on en conclut que $\frac{\partial f}{\partial x}$ est pareillement égal à zéro. Donc on a, en ce point, la double condition

$$(2)\qquad \frac{\partial f}{\partial x} = o, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = o.$$

Si l'on suppose actuellement que les deux branches aient entre elles un contact du premier ordre, alors $\frac{k'-k}{h^2}$ aura une limite finie [567]. Or des équations

$$h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + \frac{k^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \varepsilon_3 = o,$$

$$h\frac{\partial f}{\partial x} + k'\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{h^2}{a}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + hk'\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + \frac{k'^2}{2}\frac{\partial^2 f}{d y^2} + \varepsilon'_3 = o$$

on tire, par soustraction,

$$o = \frac{k'-k}{h^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y} + h\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + \frac{k'+k}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\varepsilon'_3 - \varepsilon_3}{k'-k}\right),$$

et h, $\frac{k'+k}{2}$, $\frac{\varepsilon'_3 - \varepsilon_3}{k'-k}$ étant des quantités infiniment petites, on en conclut encore que $\frac{\partial f}{\partial y}$, et par suite aussi $\frac{\partial f}{\partial x}$ sont nuls.

En général, si les deux branches ont entre elles un contact

6.

d'ordre n, $\frac{k'-k}{h^n}$ ayant une limite finie, on développera les équations précédentes jusqu'aux termes d'ordre n, ce qui donnera

$$0 = h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y} + \ldots + \varepsilon_{n+1},$$

$$0 = h\frac{\partial f}{\partial x} + k'\frac{\partial f}{\partial y} + \ldots + \varepsilon'_{n+1}.$$

En faisant la soustraction, il ne restera dans le développement que les termes divisibles par $k'-k$, et l'on aura

$$0 = \frac{k'-k}{h^n}\left(\frac{\partial f}{\partial y} + \ldots + \frac{\varepsilon'_{n+1} - \varepsilon_{n+1}}{k'-k}\right).$$

Tous les termes de la parenthèse qui suivent le premier étant infiniment petits, il en résultera toujours que $\frac{\partial f}{\partial y}$ doit être nul.

Donc, en général, on a, pour un point multiple où il passe plus d'une branche de courbe, les relations (2), qui doivent avoir lieu en même temps que l'équation $f(x, y) = 0$.

594. Si par le point (x, y) il passe une troisième branche de courbe, non tangente aux deux autres, on aura, en ayant égard aux équations (2), qui sont nécessairement satisfaites,

$$0 = \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + \frac{k^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \varepsilon_3,$$

avec deux autres équations semblables pour les accroissements k', k'' des ordonnées des autres branches. On en tire par soustraction

$$0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + \frac{k'+k}{2h}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\varepsilon'_3 - \varepsilon_3}{h(k'-k)},$$

$$0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + \frac{k''+k}{2h}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\varepsilon''_3 - \varepsilon_3}{h(k''-k)},$$

$$0 = \frac{k''-k'}{2h}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\varepsilon''_3 - \varepsilon_3}{h(k''-k)} - \frac{\varepsilon'_3 - \varepsilon_3}{h(k'-k)}.$$

Cette dernière équation donne, en passant à la limite, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$;

en revenant ensuite aux équations précédentes, on en conclut que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ s'annulent également. Donc si, par le point (x, y), il passe trois branches de courbe qui se coupent sans être tangentes entre elles, les dérivées partielles du second ordre de $f(x, y)$ devront s'annuler en ce point, comme les deux dérivées partielles du premier ordre, et l'on aura, outre l'équation $f(x, y) = 0$ et les équations (2), les conditions

$$(3) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

On étendrait, comme précédemment, ce résultat au cas où deux de ces branches, ou toutes les trois, seraient tangentes entre elles.

On voit sans peine comment on peut poursuivre ces considérations, lorsque la courbe a un nombre quelconque de branches passant par le point (x, y).

595. La propriété des points multiples, d'annuler les deux dérivées partielles du premier membre de l'équation de la courbe, a lieu également pour les points isolés et pour les points de rebroussement.

Soit, en effet, (x_0, y_0) un tel point. On pourra tracer par ce point une infinité de droites telles que, d'un côté d'une de ces droites, il n'existe aucun point de la courbe infiniment voisin du point (x_0, y_0). Si l'on prend donc sur une telle droite, de part et d'autre du point (x_0, y_0), deux points infiniment voisins

$$(x_0 - h, y_0 - k), \quad (x_0 + h, y_0 + k),$$

on pourra mener de l'un de ces points à l'autre une ligne continue qui ne rencontre pas la courbe, et, par conséquent, en aucun point de laquelle la fonction $f(x, y)$ ne puisse s'annuler. Cette fonction, étant supposée finie et continue pour toutes les valeurs finies de x et de y, ne pourra donc changer de signe, lorsque x et y passent des valeurs $x_0 - h$, $y_0 - k$ aux valeurs $x_0 + h$, $y_0 + k$. Or, à cause de $f(x_0, y_0) = 0$, on a

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = h f'(x_0) + k f'(y_0) + \varepsilon_2.$$

Pour que cette quantité ne change pas de signe avec h et k, il faut

évidemment, $\frac{k}{h}$ étant arbitraire, que $f'(x_0)$ et $f'(y_0)$ soient nuls, et par suite que les coordonnées du point isolé ou du point de rebroussement satisfassent aux conditions (2).

596. Donc, pour obtenir les points de la courbe $f(x,y)=0$ qui peuvent être singuliers, on cherchera d'abord les solutions communes aux trois équations

$$f(x,y)=0, \quad \frac{\partial f}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}=0;$$

puis l'on examinera en particulier chacun des points correspondants à ces solutions.

Dans le voisinage du point (x,y) qui satisfait à ces conditions, on a

$$0=\frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\frac{k^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\varepsilon_3.$$

En supposant que les conditions (3) ne soient pas toutes satisfaites, la limite y' du rapport $\frac{k}{h}$ sera donnée par l'équation du second degré

$$(4) \qquad 0=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+y'\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\frac{1}{2}y'^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Toutes les fois que les racines de cette équation ne seront pas réelles, c'est-à-dire toutes les fois qu'on aura

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}<0,$$

le rapport $\frac{k}{h}$, infiniment peu différent de y', ne sera pas réel non plus. Il n'existera donc aucun point réel $(x+h, y+k)$ de la courbe dans le voisinage du point (x,y). Ce point sera donc un point isolé.

Si l'équation (4) a ses racines égales, et par suite réelles, les deux valeurs de $\frac{k}{h}$ différeront infiniment peu l'une de l'autre. On aura donc deux branches tangentes entre elles, se continuant de part et d'autre du point (x,y), ou bien s'arrêtant toutes les deux en ce point, qui sera alors un point de rebroussement; ou bien

enfin $\frac{k}{h}$, quoique différant infiniment peu d'une valeur réelle, sera imaginaire, et le point (x, y) sera un point isolé.

Si les racines de l'équation (4) sont réelles et inégales, c'est-à-dire, si l'on a

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} > 0,$$

le point (x, y) sera généralement un point double, ou exceptionnellement un point isolé.

Si les trois dérivées partielles du second ordre sont nulles, on poussera le développement plus loin, et l'on discutera les racines de l'équation du troisième degré en y'. Et ainsi de suite.

597. Un point de rebroussement est dit de *première* ou de *seconde espèce*, suivant que les deux branches de courbe qui viennent se toucher et s'arrêter en ce point sont situées de part et d'autre de la tangente commune, ou d'un même côté de cette tangente.

En exceptant le cas de $y' = 0$, où le point de rebroussement correspond à un maximum ou à un minimum de x seulement si le rebroussement est de première espèce, et le cas de $y' = \infty$, où le rebroussement de première espèce correspond à un maximum ou à un minimum de y seulement, un point de rebroussement de première ou de seconde espèce correspond à un maximum ou à un minimum de x et de y à la fois. Ce caractère servira à déterminer les points de rebroussement, lorsque x et y seront exprimés au moyen d'une variable indépendante quelconque, qui ne devienne pas maximum ou minimum en même temps que les coordonnées [400]. On cherchera dans ce cas les valeurs de cette variable t pour lesquelles $x = \varphi(t)$ et $y = \chi(t)$ sont maxima ou minima à la fois, ou qui donnent x maximum ou minimum avec $y' = 0$, ou bien y maximum ou minimum avec $y' = \infty$.

598. Considérons la *courbe dérivée*, dont nous avons déjà fait usage [591], et qui a pour ordonnée la valeur de y' qui correspond à chaque abscisse x dans la courbe proposée $f(x, y) = 0$. En exceptant le cas où la tangente commune est parallèle à l'axe des y (cas que l'on peut toujours éviter, en échangeant, s'il le faut, les

axes entre eux), un point de rebroussement correspond à un maximum ou à un minimum de x dans la courbe proposée, et par suite aussi dans la courbe dérivée (sauf le cas où une branche imaginaire aurait une tangente dont le coefficient angulaire serait réel).

Dans le cas d'un rebroussement de première espèce, y' croît dans le même sens avant et après le point considéré, lorsqu'on passe d'une branche à l'autre de la courbe primitive. Il s'ensuit de là qu'au point correspondant de la courbe dérivée la tangente est parallèle à l'axe des y. On a donc généralement, dans ce cas,

$$\frac{dy'}{dx} = y'' = \infty,$$

et il en résulte qu'en un point de rebroussement de première espèce le rayon de courbure $\rho = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$ est nul, et la courbure $\frac{1}{\rho}$ infinie. Par conséquent, la courbe rencontre en ce point sa développée.

Il peut arriver exceptionnellement que, pour un rebroussement de première espèce de la courbe primitive, la courbe dérivée ait aussi un rebroussement de première espèce; mais, comme il ne doit pas y avoir de maximum de y', il faut que la tangente soit parallèle aux x, et que l'on ait par conséquent

$$y'' = 0, \quad \text{d'où} \quad \rho = \infty, \quad \frac{1}{\rho} = 0,$$

ce qui correspond à une asymptote de la développée.

Si le rebroussement est de seconde espèce, y' prend, pour les deux branches, des valeurs égales au point considéré; et, en partant de ce point pour aller sur chacune des branches, y' varie dans le même sens. On en conclut que, y' devant avoir un maximum ou un minimum en même temps que x, la courbe dérivée doit avoir un point de rebroussement, et que, si ce rebroussement est de première espèce, la tangente ne doit pas être parallèle à l'axe des x.

599. Pour distinguer les deux espèces de rebroussement, il suffit de voir si, au point considéré, ou pour un point infiniment voisin, les valeurs de y'' correspondantes aux deux branches sont de signes contraires ou de même signe, c'est-à-dire si les deux

branches tournent leur concavité dans des sens contraires ou dans le même sens. Mais, si la tangente était parallèle à l'axe des y, on échangerait entre eux les axes, ou encore on vérifierait si la courbe a des points de part et d'autre de l'ordonnée tangente, ou si elle n'en a que d'un seul côté; en d'autres termes, si x n'a pas de maximum ou de minimum, ou s'il en a un.

600. Il existe des relations entre la forme de la développée au point qui correspond à un point singulier de la courbe, et la nature de ce point singulier.

Aux points d'inflexion, et généralement aux points pour lesquels la courbe a avec sa tangente un contact d'ordre supérieur au premier, on a généralement $y'' = 0$, $\rho = \infty$. Le rayon de courbure infini est une asymptote de la développée. Les deux branches infinies sont dirigées en sens contraire ou dans le même sens, selon que le point de contact est ou n'est pas un point d'inflexion, c'est-à-dire suivant que l'ordre du contact de la courbe avec la tangente est pair ou impair.

Aux points de rebroussement de première espèce de la développante, on a généralement $\rho = 0$; la développée rencontre la développante à angles droits. On voit que la réciproque est vraie, en considérant la développante comme engendrée par le point de contact primitif de la tangente à la développée, cette tangente roulant sans glisser sur la développée.

Aux points de rebroussement de seconde espèce de la développante correspondent généralement des points d'inflexion de la développée.

Les points de maximum ou de minimum du rayon de courbure répondent généralement à des points de rebroussement de première espèce de la développée, sauf le cas où l'on aurait exceptionnellement $y'' = 0$, ce qui correspondrait toujours à une asymptote de la développée.

Aux points d'arrêt et aux points saillants de la développante correspondent des points d'arrêt de la développée.

La développante d'une courbe dont deux branches infinies s'approchent d'une asymptote commune dans deux directions opposées, comme dans l'hyperbole ordinaire, a un point d'inflexion à son intersection avec l'asymptote. Elle a un contact du troisième

ordre avec sa tangente au point où elle traverse l'asymptote, lorsque les deux branches de la courbe tendent vers la même région de l'asymptote, comme dans la courbe $y = \frac{1}{x^2}$.

601. *Exemples.* — I. Soit la courbe

$$y^2 - x^2 + x^4 = 0,$$

qui est la lemniscate. On a, pour $x = 0$, $y = 0$,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x + 4x^3 = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2.$$

Donc y' est donné par l'équation $-2 + 2y'^2 = 0$, d'où $y' = \pm 1$. Ensuite, la valeur $y = \pm x\sqrt{1 - x^2}$ étant réelle pour x voisin de zéro, la courbe a deux branches réelles passant par l'origine. On a maintenant, en général,

$$yy' - x - 2x^3 = 0, \quad yy'' + y'^2 - 1 - 6x^2 = 0, \quad yy''' + 3y'y'' - 12x = 0,$$

d'où l'on tire, pour $x = 0$, $y = 0$, et pour chacune des valeurs de y', $y'' = 0$. Ensuite, y''' est donné par l'équation

$$yy^{\text{IV}} + 4y'y''' + 3y''^2 - 12 = 0,$$

qui donne une valeur de y''' différente de zéro. Donc chacune des deux branches de courbe présente une inflexion à l'origine.

II. L'équation

$$x^3 - 3axy + y^3 = 0$$

donne, pour $x = 0$, $y = 0$,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3(x^2 - ay) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3(y^2 - ax) = 0.$$

Puis on a, pour ce point,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -3a, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y,$$

et l'équation en y',

(1) $$6yy'^2 - 6ay' + 6x = 0,$$

a une racine nulle et une racine infinie. Pour avoir le sens de la concavité, différentions deux fois l'équation précédente, ce qui donne les équations

$$(y^2 - ax)y'' + 2yy'^2 - 2ay' + 2x = 0,$$
$$(y^2 - ax)y''' + 6yy'y'' - 3ay'' + 2y'^3 + 2 = 0.$$

On tire de la dernière, pour $x = y = y' = 0$, $y'' = \frac{2}{3a}$, valeur positive avec a; donc la branche tangente à l'axe des x est concave vers le haut. Pour l'autre branche, tangente à l'axe des y, nous chercherons le sens de sa concavité relativement à la direction des x, lequel dépend [547] du signe de $x'' = -\frac{y''}{y'^3}$. Or on a, en négligeant des quantités qui s'annulent,

$$6yy' \cdot \frac{y''}{y'^3} - 3a\frac{y''}{y'^3} + 2 + \frac{2}{y'^3} = 0.$$

D'ailleurs l'équation (1) donne

$$yy' - a + \frac{x}{y'} = 0;$$

d'où, pour $x = 0$, $y' = \infty$,

$$\lim yy' = a.$$

Donc l'équation ci-dessus donne

$$x'' = -\frac{y''}{y'^3} = \frac{2}{3a},$$

et par suite la courbe est concave vers la droite.

III. Considérons la courbe

$$y^2 - 2x^2y + x^5 = 0, \quad \text{ou} \quad y = x^2(1 \pm \sqrt{1-x}),$$

pour laquelle $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ s'évanouissent au point $x = 0, y = 0$. L'équation dérivée seconde donne, en ce point, $2y'^2 = 0$. Donc y' a une valeur double égale à zéro, ce qui annonce deux branches

tangentes à l'axe des x. Pour avoir le sens de la concavité, on poussera jusqu'à l'équation dérivée quatrième, qui donne

$$(6y'' - 24)y'' = 0,$$

d'où les deux valeurs $y'' = 4$, $y'' = 0$. La première valeur indique une branche concave vers le haut; la seconde annonce une inflexion. En effet, en différentiant une fois de plus, on trouve $y''' > 0$.

IV. Si l'on prend la courbe

$$y^2 - 2x^2y + x^4 + x^5 = 0, \quad \text{ou} \quad y = x^2(1 \pm \sqrt{-x}),$$

l'équation différentielle première $df = 0$ devient identique pour $x = y = 0$. L'équation $d^2f = 0$ donne pour y' deux valeurs nulles, et comme la courbe n'a de points qu'à gauche de l'origine, on en conclut que l'origine est un point de rebroussement. L'équation $d^4f = 0$ donne $y''^2 - 4y'' + 4 = 0$, équation dont les deux racines sont de même signe. Donc on a un point de rebroussement de seconde espèce.

V. Soit encore la courbe

$$y^2 + x^2 + x^3 = 0, \quad \text{ou} \quad y = \pm x\sqrt{-1 - x}.$$

On voit immédiatement que l'origine est un point du lieu, lequel annule $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$. Pour ce point, l'équation $d^2f = 0$ se réduit à $y'^2 + 1 = 0$, qui n'a pas de racine réelle. Donc l'origine est un point isolé.

602. Dans le cas où les coordonnées x, y sont exprimées en fonction d'une variable indépendante t, on a un point multiple lorsque x et y reprennent l'un et l'autre les mêmes valeurs respectives pour deux valeurs distinctes t et $t + \theta$ de la variable indépendante. Ainsi, si les équations qui représentent la courbe sont $x = \varphi(t)$, $y = \chi(t)$, les points multiples seront déterminés par les deux équations

$$\varphi(t) = \varphi(t + \theta), \quad \chi(t) = \chi(t + \theta),$$

d'où l'on tirera les deux inconnues t et θ.

Soit, par exemple, la cycloïde raccourcie, représentée par les

équations
$$x = a(nt - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t).$$

Les points multiples seront déterminés par les équations

$$nt - \sin t = n(t + \theta) - \sin(t + \theta), \quad -\cos t = -\cos(t + \theta).$$

On en tire $\theta = -2t$, $nt = \sin t$, ce qui est admissible pour $n < 1$.

Si $n = 1$, cas de la cycloïde ordinaire, on a $dy = a \sin t\, dt$, valeur nulle pour $t = 0$; $y' = \frac{\sin t}{1 - \cos t} = \cot \frac{1}{2} t$, infini pour $t = 0$; $d^2 y = a \cos t\, dt^2$, valeur positive. Donc l'origine répond à un minimum de y, et non de x, pour lequel $y' = \infty$. Donc [597] c'est un point de rebroussement de première espèce.

§ IX.

APPLICATIONS DU CALCUL DES QUANTITÉS COMPLEXES À LA GÉOMÉTRIE PLANE.

603. Nous terminerons ces applications du Calcul infinitésimal à la Géométrie plane en donnant quelques notions sur la méthode créée par M. Bellavitis sous le nom de *Calcul des équipollences*, et fondée sur les principes de la Théorie des quantités complexes.

Nous avons établi la correspondance qui existe entre les constructions géométriques dans le plan et les opérations analytiques sur les quantités complexes. Rappelons d'abord quelques conséquences immédiates de ces principes.

604. Soit $c = a + ib = \gamma e^{i\theta}$ une quantité complexe; c pourra représenter indifféremment le point (a, b) ou (γ, θ) du plan, ou bien le rayon Oc mené de l'origine à ce point et considéré en grandeur et en direction. Dans ce dernier cas, c pourra être transporté parallèlement à lui-même d'une manière quelconque dans le plan.

Nous appellerons *conjuguée* de la quantité c celle qui représente un point ou un rayon *symétrique* de c par rapport à l'axe Ox, origine des angles. Nous la représenterons par la rotation $\bar{c}$.

La conjuguée d'une quantité s'obtient en changeant partout i

en $-i$ dans l'expression de cette quantité en fonction de quantités réelles. Ainsi, si nous convenons de désigner la conjuguée d'une quantité en surmontant la représentation de celle-ci d'un trait horizontal, la conjuguée de

$$c = a + ib = \gamma e^{i\theta}$$

sera

$$\bar{c} = a - ib = \gamma e^{-i\theta}.$$

605. I. L'égalité

$$c\bar{c} = a^2 + b^2 = \gamma^2$$

nous apprend que la longueur ou le module d'une quantité complexe est la racine carrée du produit de cette quantité par sa conjuguée.

II. De l'égalité

$$\frac{c}{\bar{c}} = e^{2i\theta}$$

on conclut que le coefficient de direction $e^{i\theta}$ de la quantité c est la racine carrée du rapport de cette quantité à sa conjuguée.

III. Étant données deux quantités complexes

$$c = \gamma e^{i\theta}, \quad c' = \gamma' e^{i\theta'},$$

dont les conjuguées sont

$$\bar{c} = \gamma e^{-i\theta}, \quad \bar{c}' = \gamma' e^{-i\theta'},$$

l'angle $\theta - \theta'$, que les deux lignes c, c' font entre elles, sera donné par l'équation

$$\frac{c}{\bar{c}} : \frac{c'}{\bar{c}'} = e^{2i(\theta-\theta')}.$$

IV. La quantité

$$\sqrt{cc'} = \sqrt{\gamma\gamma'}\, e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}$$

représente la *moyenne proportionnelle bissectrice* des deux lignes c, c'.

606. Soit z une variable complexe, t une variable réelle. Si l'on établit entre ces deux variables une relation quelconque

$$(1) \qquad z = f(t),$$

cette relation sera vérifiée par une suite continue de points, formant une courbe dans le plan.

Il est aisé de voir que l'équation d'une courbe quelconque peut être mise sous cette forme, en prenant pour t soit une des deux coordonnées, rectilignes ou polaires, d'un point de la courbe, soit une troisième variable, dont ces coordonnées sont des fonctions.

Réciproquement, étant donnée une équation de la forme (1), on en tire, par la séparation du réel et de l'imaginaire, deux équations, au moyen desquelles on déterminera les deux coordonnées de chaque point en fonction de la variable t.

607. Si a est une constante réelle, l'équation

(2) $$z = at$$

représentera l'axe Ox. En multipliant le second membre par un coefficient de direction $e^{i\alpha}$, l'équation

$$z = ae^{i\alpha}t$$

représentera une droite faisant avec Ox l'angle α. Si l'on écrit maintenant a au lieu de $ae^{i\alpha}$, a étant alors une quantité complexe quelconque, l'équation (2) représentera une droite quelconque passant par l'origine.

Pour $t = 1$, $z = a$. L'équation (2) est donc celle de la droite qui joint l'origine au point a.

Si l'on multiplie le second membre par un coefficient de direction $e^{i\theta}$, l'équation

$$z = e^{i\theta}at$$

représentera une droite faisant avec la droite (2) l'angle θ.

Réciproquement, l'angle θ, que font entre elles deux droites

(3) $$z = at, \quad z = a't,$$

est donné par l'équation [1]

$$e^{i\theta} = \frac{a}{a'},$$

---

[1] Il est entendu que, dans cette équation et les autres analogues, on ne s'occupe que de l'égalité des arguments.

cet angle étant compté de la seconde droite vers la première.

En supposant $\theta = \frac{\pi}{2}$, on a, pour l'équation de la perpendiculaire à la droite (2),

$$z = iat.$$

Réciproquement, la condition de perpendicularité des droites (3) sera

$$\frac{a}{a'} = \pm i.$$

La bissectrice de l'angle des deux droites (3) a pour équation

$$z = \sqrt{\pm aa'} \, . \, t,$$

en prenant le signe + ou le signe —, suivant que l'on considère les portions des deux droites correspondantes à des valeurs de t de même signe ou de signes contraires.

608. En ajoutant à chaque valeur de z une droite constante en grandeur et en direction b, on obtiendra une parallèle à la droite (2), dont l'équation sera

$$(4) \qquad z = at + b.$$

En faisant varier b, on obtient toutes les parallèles à la droite (2).

Pour que deux droites

$$z = at + b, \quad z = a't + b'$$

soient parallèles, il suffit que les droites $z = at$, $z = a't$ se confondent, ce qui aura lieu si leurs *coefficients angulaires* a, a' sont deux quantités complexes égales, ou du moins ayant même argument et par suite un rapport réel. La condition de parallélisme sera donc

$$\frac{a}{a'} = \text{une quantité réelle.}$$

La droite (4) passe par les points b, $b+a$ et $b-a$.

Pour avoir l'équation d'une droite passant par les deux points donnés z_1, z_2, on identifiera ces points avec b et $b+a$, ce qui donnera $b = z_1$, $a = z_2 - z_1$, et l'équation de la droite sera

$$z = z_1 + (z_2 - z_1)\,t, \quad \text{ou} \quad \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = t.$$

L'équation d'une droite menée par le point c et faisant avec (2) ou (4) l'angle θ sera

$$z = c + e^{i\theta} at.$$

L'équation de la perpendiculaire abaissée du point c sur la droite (2) ou (4) sera donc

$$z = c + iat.$$

609. Si l'on considère un lieu géométrique comme engendré par le mouvement du point z correspondant au temps t, un terme de la forme at exprimera un mouvement de translation suivant la direction Oa ou parallèlement à cette direction.

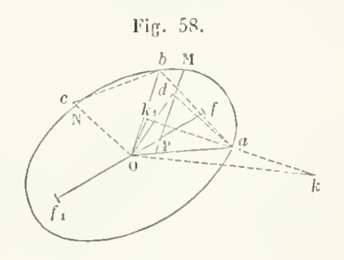
Un terme de la forme ae^{it} exprimera un mouvement de rotation de la droite a autour de son extrémité initiale.

D'après cela, il est facile de voir que les équations

$z = ae^{it}$	représentent	un cercle ayant son centre à l'origine,
$z = ae^{it} + b$	»	un cercle ayant son centre au point b,
$z = ae^{it} + bt$	»	une cycloïde allongée ou raccourcie,
$z = ae^{it} + be^{int}$	»	une épicycloïde ou une hypocycloïde,
$z = ate^{it}$	»	une spirale d'Archimède,
$z = ae^{(n+i)t}$	»	une spirale logarithmique,
$z = a(1 - it)e^{it}$	»	une développante de cercle.

610. Les équations $x = g\cos t$, $y = h\sin t$ représentent, en coordonnées obliques, une ellipse rapportée à deux diamètres conjugués $2g$, $2h$. Si α et β sont les angles de ces diamètres avec l'axe

Fig. 58.



origine des directions, les coordonnées x et y seront affectées des coefficients de direction $e^{i\alpha}$, $e^{i\beta}$; et comme (*fig.* 58)

$$z = \text{OM} = \text{OP} + \text{PM} = xe^{i\alpha} + ye^{i\beta},$$

si l'on pose

$$ge^{i\alpha} = a, \quad he^{i\beta} = b,$$

on aura enfin, pour l'équation de l'ellipse,

$$(5) \qquad z = a\cos t + b\sin t.$$

On pourrait remplacer, dans cette équation, $\cos t$ et $\sin t$ par deux autres fonctions quelconques de t dont la somme des carrés soit l'unité, et représenter l'ellipse par l'équation

$$(6) \qquad z = a\mathrm{T} + b\sqrt{1-\mathrm{T}^2}.$$

En particulier, si Oa et Ob sont les deux demi-axes, de longueurs $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$, et que l'on prenne la direction Oa pour origine des angles, Ob sera représenté par $i\mathfrak{b}$, et l'équation deviendra, $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ étant réels,

$$(7) \qquad z = \mathfrak{a}\cos t + i\mathfrak{b}\sin t.$$

Si, dans l'équation (5), on remplace t par $t + \frac{\pi}{2}$, on aura un autre point de l'ellipse N, représenté par

$$(8) \qquad z_1 = -a\sin t + b\cos t.$$

Or l'expression

$$\zeta = z\cos\tau + z_1\sin\tau = a\cos(\tau + t) + b\sin(\tau + t)$$

représente encore un point de l'ellipse, quel que soit τ. Donc OM et ON sont deux diamètres conjugués.

On tire maintenant des équations (5) et (8)

$$z^2 + z_1^2 = a^2 + b^2.$$

Donc la somme des carrés de deux diamètres conjugués, pris en grandeur et en direction, est constante. Si l'on remplace z, z_1, a, b par re^{ip}, $r_1e^{ip_1}$, $ge^{i\alpha}$, $he^{i\beta}$, on tire aisément, de l'égalité précédente,

$$(r^2 + r_1^2)^2 - 4[rr_1\sin(p_1 - p)]^2 = (g^2 + h^2)^2 - 4[gh\sin(\beta - \alpha)]^2,$$

ce qui est une conséquence des théorèmes d'Apollonius.

Désignons par f^2 la somme constante $a^2 + b^2$, et soient Of et

$Of_1 = -Of$ les deux valeurs de $\sqrt{a^2+b^2}$. On peut écrire

$$f = \sqrt{(a+ib)(a-ib)}.$$

Si l'on mène kak_1 perpendiculaire à Ob, et que l'on y porte les longueurs $ak = ak_1 = Ob$, alors on aura

$$Ok_1 = a+ib, \quad Ok = a-ib,$$

et par suite

$$f = \sqrt{Ok_1 . Ok};$$

donc Of est une moyenne proportionnelle bissectrice entre Ok_1 et Ok.

On peut construire autrement ces mêmes points f, f_1. On peut écrire

$$f = \sqrt{a\left(a+\frac{b^2}{a}\right)}.$$

On obtient $\frac{b^2}{a} = Oc$ en construisant le triangle Obc directement semblable à Oab, puis menant ad égale et parallèle à Oc. Alors Of sera la moyenne proportionnelle bissectrice de Oa et de Od.

Puisque l'on a $f^2 = z^2 + z_1^2$, on en conclut, à cause de $f_1 = -f$,

$$z_1^2 = ON^2 = (f-z)(z-f_1) = Mf . f_1 M.$$

Donc le diamètre conjugué de OM est la moyenne proportionnelle bissectrice entre les deux rayons vecteurs Mf, f_1M. Il est donc parallèle à la bissectrice de l'angle formé par un de ces rayons vecteurs et le prolongement de l'autre.

611. Étant donnée l'équation d'une courbe

$$z = f(t),$$

la différentielle dz représentera en grandeur et en direction l'élément d'arc de la courbe, et, si l'on désigne par ds la longueur de cet élément et par ω l'angle de la tangente avec l'axe Ox, on aura

$$dz = e^{i\omega} ds.$$

La valeur de ds est la moyenne proportionnelle entre dz et son

conjugué [605, I],

$$ds = \sqrt{dz\,.\,\overline{dz}}.$$

L'angle ω est déterminé [604, II] par la formule

$$e^{i\omega} = \sqrt{\frac{dz}{\overline{dz}}}.$$

En différentiant cette expression, on obtient l'angle de contingence $d\omega$.

Ainsi, pour la spirale d'Archimède, $dz = ate^{it}$, et l'on a

$$dz = a(1+it)e^{it}dt, \quad \overline{dz} = a(1-it)e^{-it}dt,$$

d'où l'on tire

$$ds = a\sqrt{1+t^2}\,.\,dt, \quad e^{i\omega} = e^{it}\sqrt{\frac{1+it}{1-it}}.$$

Pour l'ellipse rapportée à ses axes [610, (7)], on a

$$dz = (-\mathfrak{a}\sin t + \mathfrak{b}\,i\cos t)\,dt,$$

d'où résulte

$$ds = \sqrt{\mathfrak{a}^2\sin^2 t + \mathfrak{b}^2\cos^2 t}\,.\,dt.$$

612. Cherchons maintenant l'équation de la tangente. Cette équation étant de la forme $\zeta = z + a\tau$, le coefficient angulaire a doit être égal [608] à dz multiplié par une quantité réelle, que nous pouvons choisir égale à $\frac{1}{dt}$. En posant donc

$$\frac{dz}{dt} = z',$$

nous aurons, pour l'équation de la tangente au point z,

(9) $$\zeta = z + z'\tau.$$

D'après cela, on aura, pour l'équation de la normale en z,

(10) $$\zeta = z + iz'\tau,$$

et pour l'équation d'une *oblique*, faisant avec la tangente l'angle γ,

(11) $$\zeta = z + e^{i\gamma}z'\tau.$$

613. *Exemples.* — I. D'après cela, la tangente à l'ellipse aura pour équation

$$\zeta = a\cos t + b\sin t + (-a\sin t + b\cos t)\tau.$$

On voit que cette droite est parallèle au diamètre ON, conjugué de OM [610, (8)], et par suite bissectrice de l'angle supplémentaire des rayons vecteurs.

ζ étant la somme des deux composantes $a(\cos t - \tau\sin t)$, et $b(\sin t + \tau\cos t)$, parallèles l'une à Oa, l'autre à Ob, cette droite rencontrera l'une des droites Oa, Ob, lorsque sa composante parallèle à l'autre sera nulle. Ainsi on aura le point de rencontre avec Oa en faisant

$$\sin t + \tau\cos t = 0,$$

d'où

$$\tau = -\operatorname{tang} t, \quad \text{et} \quad \zeta_a = \frac{a}{\cos t}.$$

On trouverait de même, pour le point de rencontre avec Ob,

$$\zeta_b = \frac{b}{\sin t}.$$

On conclut de là

$$\frac{a^2}{\zeta_a^2} + \frac{b^2}{\zeta_b^2} = 1.$$

II. La parabole étant engendrée par la composition de deux mouvements, l'un dirigé suivant Oa et proportionnel au carré du temps, l'autre dirigé suivant Ob et proportionnel au temps, son équation sera

$$z = at^2 + bt,$$

a et b étant des quantités complexes quelconques.

L'équation de la tangente sera

$$\zeta = at^2 + bt + (2at + b)\tau.$$

Cette tangente rencontre Oa pour $\tau = -t$, ce qui donne

$$\zeta_a = -at^2.$$

Ce point est donc symétrique, par rapport à l'origine, de l'extrémité de la composante at^2 parallèle à Oa. Elle rencontre Ob pour $\tau = -\frac{1}{2}t$, d'où $\zeta_b = \frac{1}{2}bt$.

Par le point M menons une droite Mf qui fasse avec la tangente MT le même angle que celle-ci fait avec Oa. En introduisant un facteur réel indéterminé k, on aura

$$\frac{1}{k} Mf : MT = MT : Oa,$$

d'où, en mettant pour $MT = \zeta - z$ sa valeur $2at + b$,

$$Mf = \frac{k}{a}(2at + b)^2.$$

Donc $Of = OM + Mf$ a pour valeur

$$(1 + 4k)(at^2 + b) + k\frac{b^2}{a},$$

et cette valeur sera indépendante de t, si l'on prend $k = -\frac{1}{4}$, d'où

$$Of = -\frac{b^2}{4a},$$

valeur qu'il est facile de construire. Il existe donc un point fixe par lequel passent toutes les droites faisant avec la tangente un angle égal à l'angle de celle-ci avec Oa. C'est le foyer de la parabole.

III. L'équation de la tangente à la spirale d'Archimède, $z = ate^{it}$, sera

$$\zeta = z + ae^{it}(1 + it)\tau.$$

Pour avoir l'angle de la tangente avec le rayon vecteur, on prendra la formule

$$e^{2i\theta} = \frac{\zeta - z}{\zeta_0 - z_0} : \frac{z}{z_0} = \frac{1 + it}{1 - it},$$

d'où l'on tire

$$\tang\theta = \frac{1}{i}(e^{2i\theta} - 1) : (e^{2i\theta} + 1) = t.$$

614. Cherchons actuellement le centre de courbure, intersection de deux normales infiniment voisines.

Pour passer d'une normale à la suivante, il faut changer t en $t + dt$. Au point d'intersection des deux normales, ζ doit être le

même, et par conséquent $d\zeta$ nul; mais τ aura dû varier d'une normale à l'autre, et se changer en $\tau + d\tau$. On différentiera donc l'équation (10) de la normale par rapport à t (dont z est fonction) et à τ, en laissant ζ constant, et l'on aura ainsi l'équation

$$(12) \qquad 0 = z'\left(1 + i\frac{d\tau}{dt}\right) + iz''\tau,$$

équation qui se partagera en deux équations réelles, d'où l'on tirera les valeurs de τ et de $\frac{d\tau}{dt}$ pour le point d'intersection. En mettant pour τ la valeur trouvée dans l'équation (10), on aura le ζ du centre de courbure correspondant au point z.

La longueur du rayon de courbure sera donnée par la formule

$$\rho = \sqrt{(\zeta - z)(\bar{\zeta} - \bar{z})} = \tau\sqrt{z'\bar{z}'}.$$

Si, dans l'équation qui donne le ζ du centre de courbure, on considère t comme variable, on aura l'équation du lieu des centres de courbure, ou de la développée de la courbe proposée.

Le même calcul s'applique à la recherche du lieu des intersections successives des obliques représentées par l'équation (11). Ce lieu porte le nom de *développée imparfaite* de la courbe.

615. *Exemples.* — I. Si l'on considère l'ellipse rapportée à ses axes principaux,

$$z = a\cos t + ib\sin t,$$

l'équation de la normale

$$\zeta = a\cos t + ib\sin t + i\tau(-a\sin t + ib\cos t)$$

donne, par la différentiation,

$$0 = (-a\sin t + ib\cos t)\left(1 + i\frac{d\tau}{dt}\right) - i\tau(a\cos t + ib\sin t),$$

d'où l'on tire, en séparant le réel de l'imaginaire,

$$ab\tau = a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t.$$

Mettant cette valeur dans l'équation de la normale et faisant

$\zeta = \xi + i\eta$, il vient

$$a\xi = (a^2 - b^2)\cos^3 t, \quad b\eta = (b^2 - a^2)\sin^3 t,$$

d'où l'équation de la développée

$$(a\xi)^{\frac{2}{3}} + (b\eta)^{\frac{2}{3}} = (a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}.$$

II. La cycloïde ordinaire, rapportée à son point de rebroussement et à sa base, a pour équation, le rayon du cercle générateur étant $= 1$,

$$z = t + i(1 - e^{-it}).$$

L'équation de la tangente est donc

$$\zeta = t + (\tau + i)(1 - e^{-it}).$$

Pour $\tau = i\dfrac{1 + e^{-it}}{1 - e^{-it}} = \cot\dfrac{t}{2}$, on a $\zeta = t + 2i$. Donc la tangente passe par l'extrémité supérieure du diamètre vertical du cercle générateur.

L'équation de la normale est

$$\zeta = t + i(1 + \tau)(1 - e^{-it}).$$

Elle donne $\zeta = t$ pour $\tau = -1$; donc la normale passe au point de contact du cercle générateur. Il vient, en différentiant,

$$1 - (1 + \tau)e^{-it} + i(1 - e^{-it})\frac{d\tau}{dt} = 0,$$

d'où l'on tire $\tau = -2$, et par suite le rayon de courbure est double de la normale. L'équation de la développée est donc

$$\zeta = t - i(1 - e^{-it}),$$

ce qui représente une cycloïde égale à la proposée. On peut, en effet, écrire cette équation sous la forme

$$\zeta + \pi = t + \pi - 2i + i(1 - e^{-i(t+\pi)}),$$

équation de la proposée dont on a transporté le point de rebroussement au point $\pi - 2i$.

Si l'on cherche de même la développée imparfaite, c'est-à-dire le lieu des intersections successives des obliques représentées par

l'équation

$$\zeta = t + (i + e^{i\gamma}\tau)(1 - e^{-it}),$$

on trouve $\tau = -2\sin\gamma$, et par suite l'équation du lieu est

$$\zeta = t + (1 - e^{i\gamma}\sin\gamma)(1 - e^{-it}).$$

III. Pour la spirale logarithmique

$$z = e^{(n+i)t},$$

l'équation de la normale est

$$\zeta = e^{(n+i)t}[1 + i(n + i)\tau],$$

ce qui donne, en différentiant et divisant par $n + i$,

$$0 = 1 + (in - 1)\tau + i\frac{d\tau}{dt},$$

d'où l'on tire $\tau = 1$. On a donc, pour l'équation de la développée,

$$\zeta = ine^{(n+i)t},$$

ce qui donne une courbe identique à la proposée que l'on aurait fait tourner d'un certain angle. La longueur du rayon de courbure est

$$\rho = \sqrt{(\zeta - z)(\overline{\zeta} - \overline{z})} = \sqrt{1 + n^2}.e^{nt}.$$

Pour la développée imparfaite, on trouve $\tau = \sin\gamma$, ce qui donne

$$\zeta = [1 + (n + i)e^{i\gamma}\sin\gamma]e^{(n+i)t},$$

équation qui représente encore la même spirale, à la position près.

616. La recherche des développées est un cas particulier du problème des enveloppes, et la solution de celui-ci peut être comprise, avec le problème des trajectoires, orthogonales ou obliquangles, dans une même formule commune.

Soit

$$(13) \qquad z = f(t, \lambda)$$

l'équation d'une courbe, renfermant un paramètre arbitraire λ, que nous supposerons réel, comme la variable t. Si l'on considère un

lieu rencontrant toutes les courbes de la série représentée par cette équation pour les différentes valeurs de λ, les divers points de ce lieu correspondront à des valeurs de z données par l'équation (13), où l'on fera varier simultanément t et λ. Si l'on établit entre ces deux quantités une certaine relation, on déterminera la nature du lieu qui traverse les courbes (13).

Supposons maintenant que la trajectoire cherchée doive couper les lignes (13) sous un angle constant θ. On exprimera cette condition en écrivant que l'angle des tangentes à la ligne (13), obtenues l'une en supposant λ constant, l'autre en supposant λ variable, est égal à l'angle donné θ.

En différentiant l'équation (13) dans les deux hypothèses, on trouve respectivement, pour les coefficients angulaires des deux tangentes,

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t}, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \lambda}\frac{d\lambda}{dt},$$

ou, en supposant, pour abréger, $\frac{\partial f}{\partial t} = z'$, $\frac{\partial f}{\partial \lambda} = z_{,}$,

$$\frac{\partial z}{\partial t} = z', \quad \frac{dz}{dt} = z' + z_{,}\frac{d\lambda}{dt}.$$

On aura donc, pour déterminer l'angle de ces deux tangentes [605, III], la formule

$$\frac{z' + z_{,}\frac{d\lambda}{dt}}{\bar{z}' + \bar{z}_{,}\frac{d\lambda}{dt}} : \frac{z'}{\bar{z}'} = e^{2i\theta},$$

ou, en faisant $e^{2i\theta} = m$,

$$(14) \qquad (mz'\bar{z}_{,} - \bar{z}'z_{,})\frac{d\lambda}{dt} + (m-1)z'\bar{z}' = 0.$$

Si $\theta = \frac{\pi}{2}$, alors $m = -1$, et l'on a, pour l'équation des trajectoires orthogonales,

$$(15) \qquad (z'\bar{z}_{,} + \bar{z}'z_{,})\frac{d\lambda}{dt} + 2z'\bar{z}' = 0.$$

617. L'équation (14) sert aussi à la détermination des courbes

enveloppes. En y faisant $\theta = 0$, d'où $m = 1$, le second terme de l'équation disparaît, et, en supprimant le facteur $\frac{d\lambda}{dt}$, qui, égalé à zéro, donnerait une quelconque des enveloppées, on a, pour déterminer l'enveloppe, l'équation

$$(16) \qquad z'\bar{z}_{,} - \bar{z}'z_{,} = 0.$$

Tirant de là la valeur de λ, et la reportant dans l'équation (13), on aura l'équation de l'enveloppe.

Exemple. — Soit proposé de trouver l'enveloppe des cercles qui ont pour diamètres les cordes d'une ellipse [615]

$$z = a\cos\lambda + ib\sin\lambda$$

parallèles à l'axe $2b$. L'équation générale de ces cercles est

$$z = a\cos\lambda + b\sin\lambda . e^{it}.$$

On trouve, en différentiant,

$$z' = ib\sin\lambda . e^{it}, \quad z_{,} = -a\sin\lambda + b\cos\lambda . e^{it};$$

l'équation (16) donne alors

$$-a\sin\lambda . e^{it} + b\cos\lambda = +a\sin\lambda . e^{-it} - b\cos\lambda,$$

d'où

$$b\cot\lambda = a\cos t,$$

et, par suite, on a, pour l'équation de l'enveloppe, celle d'une ellipse

$$z = \sqrt{a^2+b^2} . \frac{\sqrt{a^2+b^2} . \cos t}{\sqrt{a^2\cos^2 t + b^2}} + ib . \frac{b\sin t}{\sqrt{a^2\cos^2 t + b^2}}.$$

618. Cherchons encore les trajectoires obliquangles d'une cycloïde mobile le long de sa base, et représentée par l'équation

$$z = \lambda + t + i(1 - e^{-it}).$$

On a ici

$$z' = 1 - e^{-it}, \quad z_{,} = 1.$$

L'équation (14) devient alors

$$0 = [\sin\theta + \sin(t-\theta)]\frac{d\lambda}{dt} + 2\sin\theta(1-\cos t),$$

que l'on peut écrire sous la forme

$$\frac{d\lambda}{dt} = -1 - \frac{\sin\theta - \sin(\theta+t)}{\sin\theta - \sin(\theta-t)}$$

$$= -1 + \frac{\cos\left(\theta + \frac{t}{2}\right)}{\cos\left(\theta - \frac{t}{2}\right)} = -1 + \cos 2\theta + \sin 2\theta \operatorname{tang}\left(\theta - \frac{t}{2}\right),$$

ce qui donne, en intégrant,

$$\lambda = C - (1 - \cos 2\theta)t + 2\sin 2\theta \log\cos\left(\theta - \frac{t}{2}\right).$$

Pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\lambda = C - 2t$, et l'on a, pour l'équation des trajectoires orthogonales de la cycloïde mobile, C étant une constante réelle,

$$z = C - t + i(1 - e^{-it});$$

ces trajectoires sont des cycloïdes égales aux proposées.

619. Trouver la trajectoire obliquangle de toutes les ellipses de mêmes foyers f, f_1.

D'après ce que nous avons vu [610 et 613], un segment MT, pris sur la tangente au point M, est égal, à un facteur réel près, à la moyenne proportionnelle bissectrice entre les deux rayons vecteurs f_1M, Mf, de sorte que le coefficient angulaire de la tangente est de la forme

$$\sqrt{\overline{f_1 M}\,.\,\overline{Mf}}.$$

Celui de la tangente à la trajectoire sera donc

$$\alpha e^{i\gamma}\sqrt{\overline{f_1 M}\,.\,\overline{Mf}} = \alpha e^{i\gamma}\sqrt{(\overline{OM} - \overline{Of_1})(\overline{Of} - \overline{OM})},$$

ce qui donne enfin

$$\frac{dz}{dt} = \alpha e^{i\gamma}\sqrt{f^2 - z^2}.$$

En intégrant cette équation, il vient, pour l'équation des trajectoires obliquangles de l'ellipse,

$$z = f\cos(e^{i\gamma t} + \mathrm{C}),$$

en écrivant, pour plus de simplicité, t au lieu de αt.

Pour $\gamma = \frac{\pi}{2}$, l'équation devient

$$z = f\cos \mathrm{C}.\mathrm{Ch}\, t - if\sin \mathrm{C}.\mathrm{Sh}\, t,$$

équation d'une hyperbole.

620. Appliquons les calculs précédents aux trajectoires et aux enveloppes des normales et des obliques d'une courbe donnée.

Considérons l'équation d'une oblique

$$\zeta = z + e^{i\gamma}\frac{dz}{dt}\tau.$$

Pour appliquer à cette ligne la formule (14), il faut changer dans celle-ci z, t, λ en ζ, τ, t respectivement. On remplacera alors z' par $\frac{\partial\zeta}{\partial\tau} = e^{i\gamma}\frac{dz}{dt}$, et $z_{\prime}$ par $\frac{\partial\zeta}{\partial t} = \frac{dz}{dt} + e^{i\gamma}\frac{d^2z}{dt^2}\tau$, et l'équation (14) devient, par ces substitutions, en écrivant z', z'' au lieu de $\frac{dz}{dt}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$,

$$(17)\quad \mathrm{o} = \left[(e^{i\gamma}m - e^{-i\gamma})z'\bar{z}' + (mz'\bar{z}'' - \bar{z}'z'')\frac{dt}{d\tau} + (m-1)z'\bar{z}'\right],$$

ou

$$(18)\qquad \mathrm{o} = \sin\theta\, d\tau + \sin(\theta+\gamma)\, dt + \frac{\tau}{2i}\left(e^{i\theta}\frac{d\bar{z}'}{\bar{z}'} - e^{-i\theta}\frac{dz'}{z'}\right).$$

En posant, comme au n° 611, $dz = e^{i\omega}ds$, et de plus $s' = \frac{ds}{dt}$, on a

$$\frac{dz'}{z'} = d\log z' = d(i\omega + \log s') = i\,d\omega + \frac{ds'}{s'}.$$

L'équation (18) devient alors, sous forme réelle,

$$(19)\qquad \mathrm{o} = \sin\theta\, d\tau + \sin(\theta+\gamma)\, dt + \tau\left(\cos\theta\, d\omega + \sin\theta\frac{ds'}{s'}\right).$$

En faisant dans ces formules $\gamma = \frac{\pi}{2}$, on a, sous ses diverses formes, l'équation des trajectoires obliquangles des normales.

Si l'on suppose $\theta = 0$, on a l'équation de l'enveloppe des obliques, d'où l'on tire

$$\tau = -\frac{2i\sin\gamma \,.\, z'\bar{z}'}{z'\bar{z}'' - \bar{z}'z''} = -\sin\gamma\frac{dt}{d\omega},$$

de sorte que l'équation de la développée imparfaite sera

(20) $$\zeta = z + (1 - e^{2i\gamma})z' \cdot \frac{z'\bar{z}'}{z'\bar{z}'' - \bar{z}'z''},$$

ou, sous une forme plus simple,

(21) $$\zeta = z - i\sin\gamma\frac{dz}{d\omega}.$$

En supposant $\gamma = \frac{\pi}{2}$, on a les formules analogues pour la développée ordinaire,

(22) $$\zeta = z - 2z' \cdot \frac{z'\bar{z}'}{z'\bar{z}'' - \bar{z}'z''} = z - i\frac{dz}{d\omega}.$$

On en tire facilement les formules du n° 555.

621. Si l'on suppose à la fois $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\gamma = \frac{\pi}{2}$, l'équation (18) devient

$$0 = \frac{d\tau}{\tau} + \frac{1}{2}\left(\frac{d\bar{z}'}{\bar{z}'} + \frac{dz'}{z'}\right),$$

qui donne, en intégrant,

$$\tau = \frac{C}{\sqrt{z'\bar{z}'}} = C\frac{dt}{ds},$$

et, par suite, l'équation générale des trajectoires orthogonales des normales sera

$$\zeta = z + C\frac{dz}{ds},$$

ou encore

$$\zeta = z + Cie^{\omega i}.$$

On voit par là que le module de $\zeta - z$ est constant, et que, par

suite, tous les points d'une même trajectoire sont équidistants de la courbe donnée. En partant de cette propriété, on aurait pu poser immédiatement l'équation précédente.

Si, au lieu de compter les distances constantes sur les normales, on les compte sur les obliques d'inclinaison γ par rapport à la tangente, il suffira de remplacer, dans l'équation précédente, le coefficient de perpendicularité i par $e^{i\gamma}$, et l'on aura, pour l'équation de la trajectoire qui coupe les obliques à une distance constante de leur origine sur la courbe,

$$\zeta = z + C e^{i(\omega+\gamma)}.$$

622. Cherchons enfin la trajectoire des obliques à la courbe, dont la tangente en chaque point est parallèle à la tangente au point de la courbe situé sur la même oblique. La trajectoire cherchée étant représentée par

$$\zeta = z + e^{i\gamma} z' \tau,$$

où τ est une fonction inconnue de t, il faut que, pour la même valeur de t, les tangentes à la trajectoire et à la courbe soient parallèles, ce qui conduit à la condition

$$\frac{\zeta'}{\bar{\zeta}'} = \frac{z'}{\bar{z}'},$$

ou, en mettant pour ζ' sa valeur

$$z'\left(1 + e^{i\gamma}\frac{d\tau}{dt}\right) + e^{i\gamma} z'' \tau,$$

et réduisant,

$$\sin\gamma \frac{d\tau}{\tau} + \frac{1}{2i}\left(e^{i\gamma}\frac{dz'}{z'} - e^{-i\gamma}\frac{d\bar{z}'}{\bar{z}'}\right) = 0.$$

En posant $dz = e^{\omega i} ds$, cette équation devient

$$\sin\gamma\left(\frac{d\tau}{\tau} + \frac{ds'}{s'}\right) + \cos\gamma\, d\omega = 0,$$

d'où, en intégrant,

$$\tau = C\frac{dt}{ds} e^{-\omega \cot\gamma},$$

et, par suite, l'équation de la trajectoire demandée sera

$$\zeta = z + C e^{i\gamma - \omega \cot \gamma} \frac{dz}{ds} = z + C e^{i(\gamma + \omega) - \omega \cot \gamma}.$$

On voit que les portions d'obliques comprises entre les deux courbes sont égales et parallèles aux rayons vecteurs d'une spirale logarithmique.

CHAPITRE II.

APPLICATIONS DU CALCUL DIFFÉRENTIEL A LA GÉOMÉTRIE A TROIS DIMENSIONS.

§ I.

TANGENTE, PLAN NORMAL, PLAN OSCULATEUR, NORMALE PRINCIPALE, ETC. AUX COURBES NON PLANES.

623. Une équation entre les trois coordonnées d'un point détermine une surface. Il en est de même lorsque ces trois coordonnées font partie d'un système de n variables, liées entre elles par $n-2$ équations.

Deux équations entre les trois coordonnées d'un point déterminent une ligne. Il en est de même lorsque ces trois coordonnées font partie d'un système de n variables, liées entre elles par $n-1$ équations.

624. Soient x, y, z les coordonnées rectangulaires d'un point M d'une ligne. Nous supposerons, pour plus de symétrie dans les calculs, que les trois variables x, y, z sont des fonctions données d'une variable indépendante t, qui peut se confondre avec l'une quelconque des trois variables x, y, z.

Les équations d'une droite quelconque passant par le point $\mathrm{M}(x, y, z)$ sont de la forme

$$\frac{\xi - x}{\mathrm{A}} = \frac{\eta - y}{\mathrm{B}} = \frac{\zeta - z}{\mathrm{C}},$$

et la distance de cette droite à un point $\mathrm{M}'(x+h, y+i, z+k)$, pris sur la courbe à une distance infiniment petite du point M,

aura pour carré

$$\delta^2 = \frac{(Bk - Ci)^2 + (Ch - Ak)^2 + (Ai - Bh)^2}{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Soient maintenant $x' = \frac{dx}{dt}$, $y' = \frac{dy}{dt}$, $z' = \frac{dz}{dt}$ les dérivées des coordonnées par rapport à la variable indépendante t. On aura

$$h = (x' + \varepsilon_1)dt, \quad i = (y' + \varepsilon_2)dt, \quad k = (z' + \varepsilon_3)dt,$$

ε_1, ε_2, ε_3 étant infiniment petits en même temps que dt et que h, i, k. Si l'on détermine A, B, C de manière que l'on ait

$$\frac{A}{x'} = \frac{B}{y'} = \frac{C}{z'},$$

on aura alors

$$Bk - Ci = (B\varepsilon_3 - C\varepsilon_2)dt,$$

et de même pour les deux autres expressions analogues. Donc

$$\delta^2 = \frac{(B\varepsilon_3 - C\varepsilon_2)^2 + (C\varepsilon_1 - A\varepsilon_3)^2 + (A\varepsilon_2 - B\varepsilon_1)^2}{A^2 + B^2 + C^2} dt^2$$
$$= \frac{(y'\varepsilon_3 - z'\varepsilon_2)^2 + (z'\varepsilon_1 - x'\varepsilon_3)^2 + (x'\varepsilon_2 - y'\varepsilon_1)^2}{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt^2,$$

quantité infiniment petite du quatrième ordre. Donc, pour la direction correspondante à des valeurs de A, B, C proportionnelles à x', y', z', la distance δ est infiniment petite du second ordre.

Réciproquement, pour que δ^2 soit infiniment petit d'ordre supérieur au second, il faut que les rapports $\frac{h}{A}$, $\frac{i}{B}$, $\frac{k}{C}$ diffèrent entre eux infiniment peu, et qu'il en soit, par suite, de même des rapports $\frac{x' + \varepsilon_1}{A}$, $\frac{y' + \varepsilon_2}{B}$, $\frac{z' + \varepsilon_3}{C}$, ce qui ne peut avoir lieu que si l'on donne aux constantes A, B, C des valeurs proportionnelles aux quantités x', y', z'.

Il existe donc une droite passant par le point M, et une seule, telle que sa distance à un point de la courbe infiniment voisin du point M est infiniment petite d'un ordre supérieur au premier. Cette droite, qui a pour équations

(1) $$\frac{\xi - x}{x'} = \frac{\eta - y}{y'} = \frac{\zeta - z}{z'},$$

s'appelle la *tangente* à la courbe au point $M(x, y, z)$.

625. Les rapports des quantités x', y', z' étant les limites des rapports des différentielles dx, dy, dz, il s'ensuit de là que la droite (1) est la limite de la sécante

$$(2) \qquad \frac{\xi - x}{dx} = \frac{\eta - y}{dy} = \frac{\zeta - z}{dz},$$

qui passe par le point (x, y, z) et par le point de la courbe infiniment voisin $(x + dx, y + dy, z + dz)$. Ainsi la tangente en un point d'une courbe est la limite d'une sécante passant par ce point et par un autre point de la courbe infiniment voisin du premier.

Comme d'habitude, nous emploierons aussi les équations (2) pour représenter la tangente, en les considérant comme des équations imparfaites, ou, ce qui revient au même, en y réduisant les différentielles dx, dy, dz à leurs parties principales.

626. Si l'on désigne par α, β, γ les angles que fait la tangente avec les axes coordonnés, et par $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ la corde infiniment petite qui joint le point $M(x, y, z)$ au point infiniment voisin $M'(x + dx, y + dy, z + dz)$, on aura toujours, avec la même approximation *indéfinie*,

$$\frac{\cos\alpha}{dx} = \frac{\cos\beta}{dy} = \frac{\cos\gamma}{dz} = \pm\frac{1}{ds},$$

d'où

$$\cos\alpha = \pm\frac{dx}{ds}, \quad \cos\beta = \pm\frac{dy}{ds}, \quad \cos\gamma = \pm\frac{dz}{ds},$$

les signes + ou — devant se correspondre. En prenant les signes supérieurs, on aura celle des deux directions de la tangente qui indique dans quel sens le point M marche sur la courbe pour t croissant.

627. Si les équations de la courbe sont données sous la forme

$$(3) \qquad F(x, y, z) = 0, \quad f(x, y, z) = 0,$$

les parties principales des différentielles satisfont aux équations

$$(4) \quad F'(x)dx + F'(y)dy + F'(z)dz = 0, \quad f'(x)dx + f'(y)dy + f'(z)dz = 0.$$

Dans ces équations, homogènes par rapport à dx, dy, dz, on peut substituer à ces dernières quantités les binômes qui leur sont pro-

portionnels en vertu des équations (2), et l'on a, pour les équations de la tangente sous forme finie,

$$(5)\qquad \begin{cases} F'(x)(\xi - x) + F'(y)(\eta - y) + F'(z)(\zeta - z) = 0, \\ f'(x)(\xi - x) + f'(y)(\eta - y) + f'(z)(\zeta - z) = 0. \end{cases}$$

Si l'on pose, pour abréger,

$$(6)\qquad X = \frac{\partial(F, f)}{\partial(y, z)}, \quad Y = \frac{\partial(F, f)}{\partial(z, x)}, \quad Z = \frac{\partial(F, f)}{\partial(x, y)},$$

les équations (4) et (5) pourront s'écrire sous la forme

$$(7)\qquad \frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z},$$

$$(8)\qquad \frac{\xi - x}{X} = \frac{\eta - y}{Y} = \frac{\zeta - z}{Z}.$$

628. On appelle *plan normal* à une courbe en un point donné un plan mené en ce point perpendiculairement à la tangente à la courbe.

D'après les équations (2) de la tangente, l'équation du plan normal sera

$$(9)\qquad (\xi - x)dx + (\eta - y)dy + (\zeta - z)dz = 0,$$

ou, en mettant pour dx, dy, dz les quantités qui leur sont proportionnelles en vertu des équations (7),

$$(10)\qquad X(\xi - x) + Y(\eta - y) + Z(\zeta - z) = 0.$$

L'équation (9) n'est autre chose que celle qui exprime que le plan normal est la limite du lieu des points équidistants du point (x, y, z) et d'un autre point de la courbe infiniment voisin. On a, en effet, pour un point de ce lieu,

$$\begin{aligned}[(\xi - x - dx)^2 + (\eta - y - dy)^2 + (\zeta - z - dz)^2] \\ - [(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2] = 0,\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$d_{x,y,z}[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2] = 0,$$

ce qui donne l'équation (9), lorsqu'on néglige les infiniment petits du second ordre. Donc le plan normal est la limite d'un plan per-

pendiculaire sur le milieu d'une corde infiniment petite, menée par le point donné de la courbe.

On aurait pu partir de cette propriété du plan normal, prise comme définition, et en déduire les équations de la tangente, qui lui est perpendiculaire.

629. Tout plan passant par la tangente est dit un *plan tangent* à la courbe. Les équations (5) représentent deux plans tangents à la courbe. L'équation générale d'un plan tangent sera celle d'un plan passant par l'intersection des plans (5), savoir

$$[\lambda F'(x) + \mu f'(x)](\xi - x) + [\lambda F'(y) + \mu f'(y)](\eta - y) \\ + [\lambda F'(z) + \mu f'(z)](\zeta - z) = 0,$$

$\frac{\lambda}{\mu}$ étant une indéterminée quelconque.

On peut encore obtenir directement l'équation d'un plan tangent. L'équation d'un plan quelconque passant par le point (x, y, z) est de la forme

$$l(\xi - x) + m(\eta - y) + n(\zeta - z) = 0.$$

La distance du point $(x+h, y+i, z+k)$ de la courbe à ce plan sera

$$\frac{lh + mi + nk}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}},$$

et l'on pourra la mettre sous la forme

$$\frac{l(x' + \varepsilon_1) + m(y' + \varepsilon_2) + n(z' + \varepsilon_3)}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}} dt.$$

Elle sera infiniment petite du second ordre si l'on assujettit les constantes l, m, n à la condition

$$lx' + my' + nz' = 0,$$

ou (7)

(11) $$lX + mY + nZ = 0,$$

ou enfin (6)

(12) $$\begin{vmatrix} l & m & n \\ F'(x) & F'(y) & F'(z) \\ f'(x) & f'(y) & f'(z) \end{vmatrix} = 0.$$

On peut écrire, aux infiniment petits près du second ordre,

(13) $$l\,dx + m\,dy + n\,dz = 0,$$

équation qui exprime que le plan tangent est la limite d'un plan passant par deux points de la courbe infiniment voisins.

Une perpendiculaire à un plan tangent au point de contact est une *normale* à la courbe. Donc, l, m, n étant trois quantités satisfaisant à la condition (11), (12) ou (13), les équations générales des normales, toutes situées dans le plan normal, seront

$$(14)\qquad \frac{\xi - x}{l} = \frac{\eta - y}{m} = \frac{\zeta - z}{n}.$$

630. Considérons une droite mobile d'une manière continue, et prenons deux positions consécutives de cette droite, représentées par les équations

$$\frac{x-a}{A} = \frac{y-b}{B} = \frac{z-c}{C}, \quad \frac{x-a-\Delta a}{A+\Delta A} = \frac{y-b-\Delta b}{B+\Delta B} = \frac{z-c-\Delta c}{C+\Delta C}.$$

Si l'on désigne par T le déterminant

$$T = \begin{vmatrix} A & B & C \\ A+\Delta A & B+\Delta B & C+\Delta C \\ \Delta a & \Delta b & \Delta c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B & C \\ \Delta A & \Delta B & \Delta C \\ \Delta a & \Delta b & \Delta c \end{vmatrix} = |A,\ \Delta B,\ \Delta c|,$$

la distance de ces deux positions aura pour valeur

$$\delta = \frac{T}{\sqrt{[T'(\Delta a)]^2 + [T'(\Delta b)]^2 + [T'(\Delta c)]^2}}.$$

Supposons maintenant que A, B, C, a, b, c soient des fonctions d'une variable indépendante t; on aura [338]

$$\Delta A = dA + \frac{d^2A}{1.2} + \ldots, \quad \Delta a = da + \frac{d^2 a}{1.2} + \ldots.$$

et de même pour les autres; donc

$$T = \left| A,\ dB + \frac{1}{2}d^2B + \ldots,\ dc + \frac{1}{2}d^2c + \ldots \right|$$

$$= |A,\ dB,\ dc| + \frac{1}{2}|A,\ d^2B,\ dc|$$

$$+ \frac{1}{2}|A,\ dB,\ d^2c| + \text{des termes du quatrième ordre},$$

$$T'(\Delta a) = |B,\ \Delta C| = |B,\ dC| + \text{des termes du second ordre},$$

etc.

Si l'on désigne par

$$T_0 = | A, dB, dc |$$

le premier terme du développement de T, on aura, le terme $| dA, dB, dc |$ s'annulant identiquement,

$$dT_0 = | A, d^2B, dc | + | A, dB, d^2c |.$$

Donc la valeur de T peut s'écrire, aux termes près du quatrième ordre,

$$T = T_0 + \frac{1}{2} dT_0,$$

d'où, ε_n désignant un infiniment petit d'ordre n,

$$\delta = \frac{T_0 + \frac{1}{2} dT_0 + \varepsilon_4}{\sqrt{| B, dC |^2 + | C, dA |^2 + | A, dB |^2 + \varepsilon_3}}.$$

Le dénominateur de cette expression ne s'annule pas en général, à moins que l'on n'ait, pour toute valeur de t,

$$\frac{dA}{A} = \frac{dB}{B} = \frac{dC}{C},$$

d'où l'on conclurait, en intégrant et désignant par A_0, B_0, C_0 des constantes,

$$\frac{A}{A_0} = \frac{B}{B_0} = \frac{C}{C_0}.$$

A, B, C varieraient donc proportionnellement, et la droite se mouvrait parallèlement à elle-même. Si nous excluons ce cas, le dénominateur de δ aura une valeur infiniment petite du premier ordre et différente de zéro.

Tant que T_0 n'est pas nul, cette quantité étant du second ordre, la distance δ sera infiniment petite du premier ordre.

Si T_0 est nul pour une valeur particulière de t_0, dT_0 n'étant pas nul en général, δ sera, pour cette valeur, infiniment petit du second ordre.

Si T_0 est nul, quel que soit t, dT_0 sera nul aussi, et par suite δ sera infiniment petit du troisième ordre.

Donc, si la plus courte distance de deux positions consécutives d'une droite mobile est infiniment petite d'un ordre supérieur au premier, elle sera, en général, du troisième ordre.

On a, dans ce cas,

$$T = \frac{1}{6}|A, d^3B, dc| + \frac{1}{4}|A, d^2B, d^2c| + \frac{1}{6}|A, dB, d^3c| + \varepsilon_5.$$

En retranchant de cette expression la quantité nulle

$$\frac{1}{6}d^2T_0 = \frac{1}{6}|dA, d^2B, dc| + \frac{1}{6}|A, d^3B, dc| + \frac{1}{3}|A, d^2B, d^2c| + \frac{1}{6}|A, dB, d^3c|,$$

il reste

$$T = -\frac{1}{6}|dA, d^2B, dc| - \frac{1}{12}|A, d^2B, d^2c| + \varepsilon_5,$$

d'où, aux quantités près du quatrième ordre,

$$\delta = -\frac{1}{12}\frac{2|dA, d^2B, dc| + |A, d^2B, d^2c|}{\sqrt{|B, dC|^2 + |C, dA|^2 + |A, dB|^2}}.$$

631. Supposons que la droite mobile soit la tangente à une courbe donnée. On aura alors

$$a = x, \quad b = y, \quad c = z, \quad A = x', \quad B = y', \quad C = z',$$

d'où l'on tire identiquement

$$T_0 = dt^2 \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} = 0.$$

Donc la distance des tangentes en deux points infiniment voisins d'une même courbe est infiniment petite du troisième ordre.

En poussant plus loin le développement, par la méthode du numéro précédent, on trouverait, pour l'expression de cette distance, en posant

$$\Delta = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix},$$

et négligeant les infiniment petits du quatrième ordre,

$$\delta = \frac{dt^3}{12}\frac{\Delta}{\sqrt{\left(\frac{\partial\Delta}{\partial x'''}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Delta}{\partial y'''}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Delta}{\partial z'''}\right)^2}}.$$

632. La distance du point $M'(x+dx, y+dy, z+dz)$ à un plan mené par le point $M(x, y, z)$,

$$(15)\qquad l(\xi - x) + m(\eta - y) + n(\zeta - z) = 0$$

a pour valeur [629]

$$\frac{l\,dx + m\,dy + n\,dz}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

Si l'on remplace dx, dy, dz par leurs valeurs

$$dx = x'dt + \frac{1}{2}x''dt^2 + \ldots, \quad \text{etc.},$$

cette expression de la distance devient

$$\frac{(lx' + my' + nz')\,dt + (lx'' + my'' + nz'')\dfrac{dt^2}{2} + \ldots}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

Elle sera infiniment petite du second ordre si les coefficients l, m, n satisfont à la condition

$$(16)\qquad lx' + my' + nz' = 0,$$

c'est-à-dire [629] si le plan (15) est un plan tangent à la courbe. Elle sera infiniment petite du troisième ordre si l, m, n satisfont, de plus, à la condition

$$(17)\qquad lx'' + my'' + nz'' = 0.$$

De ces deux conditions (16) et (17) on conclut

$$(18)\qquad l : m : n = \begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix},$$

et l'on peut supposer ces coefficients respectivement égaux aux quantités qui leur sont proportionnelles.

Le plan ainsi déterminé, et qui approche, infiniment plus que tout autre plan, de la courbe dans le voisinage du point $M(x, y, z)$, s'appelle le *plan osculateur* à la courbe en ce point. En poussant plus loin le calcul et adoptant les notations du numéro précédent, on trouverait, pour la distance du point $M'(x+dx, y+dy, z+dz)$

au plan osculateur en $M(x, y, z)$,

$$\frac{dt^3}{6}\frac{lx''' + my''' + nz'''}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}} = -\frac{\frac{1}{6}\Delta\, dt^3}{\sqrt{\left(\frac{\partial\Delta}{\partial x'''}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Delta}{\partial y'''}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Delta}{\partial z'''}\right)^2}},$$

aux infiniment petits près du quatrième ordre. Cette distance est donc double de la distance des deux tangentes en M et en M'.

633. Les équations (16) et (17), qui déterminent l, m, n, peuvent encore s'écrire, en ne tenant pas compte des infiniment petits négligeables,

$$(19)\qquad l\,dx + m\,dy + n\,dz = 0, \quad l\,d^2x + m\,d^2y + n\,d^2z = 0,$$

d'où l'on tire

$$(20)\qquad l : m : n = \begin{vmatrix} dy & dz \\ d^2y & d^2z \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} dz & dx \\ d^2z & d^2x \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} dx & dy \\ d^2x & d^2y \end{vmatrix},$$

ce qui équivaut, à la limite, aux proportions (18).

Ces conditions (19) expriment que le plan osculateur est la limite du plan passant par trois points de la courbe infiniment voisins.

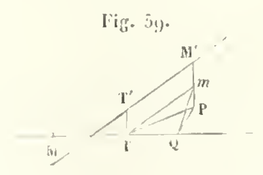
634. La condition pour que le plan tangent (15) soit parallèle à la tangente en $M'(x+dx, y+dy, z+dz)$, combinée avec la condition (16), donne

$$l\,dx' + m\,dy' + n\,dz' = 0,$$

ce qui coïncide, à la limite, avec la condition (17); donc le plan osculateur est la limite d'un plan tangent, parallèle à la tangente au point infiniment voisin.

Soit TT' (*fig.* 59) la distance des deux tangentes MT, M'T';

Fig. 59.



elle sera égale à la distance de la tangente T'M' au plan auquel elle

est parallèle, mené par MT et par la parallèle Tm à T′M′. Le plan MTm faisant un angle infiniment petit avec le plan osculateur MTP, on peut considérer la parallèle M′m à TT′ comme coïncidant en direction avec la perpendiculaire M′P abaissée sur le plan osculateur; de plus, d'après ce qu'on a vu [632],

$$\mathrm{M}'m = \frac{1}{2}\mathrm{M}'\mathrm{P} = m\mathrm{P};$$

donc la distance mP est du troisième ordre. Or la perpendiculaire PQ, abaissée du point P sur la tangente MT, a pour expression

$$\mathrm{TP} \times \text{angle}\,\mathrm{QTP} = \frac{1}{2}\,ds\,d\tau,$$

aux infiniment petits près du troisième ordre; donc l'angle du plan MTm avec le plan osculateur, c'est-à-dire l'angle mQP, a pour expression

$$\frac{m\mathrm{P}}{\mathrm{PQ}} = \frac{2\delta}{ds\,d\tau},$$

δ étant [631] la distance TT′; cet angle est donc du premier ordre.

Il en serait de même si, au lieu de prendre pour m le milieu de M′P, on menait un plan par MT et par un point quelconque de la distance M′P, ce qui ne peut faire varier qu'infiniment peu la direction de ce plan. On peut donc, en négligeant les distances infiniment petites du troisième ordre, dire que le plan osculateur est le plan de deux tangentes infiniment voisines.

L'angle du plan osculateur avec la tangente en M′ est

$$m\mathrm{TP} = \frac{m\mathrm{P}}{\mathrm{TP}} = \frac{2\delta}{ds}.$$

Cet angle est donc infiniment petit du second ordre.

Nous avons assimilé, en donnant les valeurs de PQ et de TP, la courbe à une courbe plane. Nous verrons plus tard que cette assimilation est permise dans les limites actuelles.

635. La normale menée à la courbe dans le plan osculateur étant représentée par les deux équations

$$\frac{\xi - x}{\lambda} = \frac{\eta - y}{\mu} = \frac{\zeta - z}{\nu},$$

les coefficients λ, μ, ν devront satisfaire aux deux conditions

$$(21)\qquad \lambda l + \mu m + \nu n = 0, \quad \lambda x' + \mu y' + \nu z' = 0,$$

d'où l'on tire, à cause de

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = \frac{ds^2}{dt^2}, \quad x'x'' + y'y'' + z'z'' = \frac{ds\, d^2 s}{dt^3},$$

$$\begin{aligned}
\lambda : \mu : \nu &= \begin{vmatrix} m & n \\ y' & z' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} n & l \\ z' & x' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} l & m \\ x' & y' \end{vmatrix} \\
&= [x''(y'^2 + z'^2) - x'(y'y'' + z'z'')] : \ldots \\
&= [x''(x'^2 + y'^2 + z'^2) - x'(x'x'' + y'y'' + z'z'')] : \ldots \\
&= (d^2 x\, ds^2 - dx\,.\,ds\, d^2 s) : \ldots \\
&= d\frac{dx}{ds} : d\frac{dy}{ds} : d\frac{dz}{ds}.
\end{aligned}$$

Donc les équations de cette normale, que l'on nomme la *normale principale*, peuvent s'écrire sous la forme

$$(22)\qquad \frac{\xi - x}{d\dfrac{dx}{ds}} = \frac{\eta - y}{d\dfrac{dy}{ds}} = \frac{\zeta - z}{d\dfrac{dz}{ds}}.$$

Les équations (21) expriment que la normale principale est à la fois perpendiculaire à la tangente et à l'*axe* du plan osculateur, lequel a pour équations

$$\frac{\xi - x}{l} = \frac{\eta - y}{m} = \frac{\zeta - z}{n}.$$

636. Si l'on pose, pour abréger,

$$a = \frac{dx}{ds}, \quad b = \frac{dy}{ds}, \quad c = \frac{dz}{ds},$$

$$\varpi = \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ da & db & dc \\ d^2 a & d^2 b & d^2 c \end{vmatrix},$$

on aura, pour la distance infiniment petite du premier ordre de deux normales principales consécutives,

$$\frac{\varpi}{\sqrt{[\varpi'(dx)]^2 + [\varpi'(dy)]^2 + [\varpi'(dz)]^2}}.$$

§ II.

PLANS TANGENTS ET NORMALES AUX SURFACES COURBES. — LIGNES DE NIVEAU ET DE PLUS GRANDE PENTE.

637. Soit une surface représentée par l'équation

(1) $$f(x, y, z) = 0.$$

Cette équation déterminera une des variables, z par exemple, en fonction des deux autres x, y, considérées comme variables indépendantes. Désignons, pour abréger, par

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}$$

les dérivées partielles de z par rapport à x et à y.

Par le point $M(x, y, z)$ de la surface, menons un plan

(2) $$A(\xi - x) + B(\eta - y) + C(\zeta - z) = 0.$$

La distance de ce plan à un point de la surface

$$M'(x + h, y + i, z + k),$$

infiniment voisin de M, sera

$$\delta = \frac{Ah + Bi + Ck}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Or on a [227]

$$k = (p + \varepsilon)h + (q + \varepsilon')i,$$

ε et ε' étant infiniment petits en même temps que h et i, si, comme on le suppose, z est une fonction continue de x et de y; donc

$$\delta = \frac{(A + Cp + \varepsilon)h + (B + Cq + \varepsilon')i}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Cette distance est généralement infiniment petite du premier ordre; mais elle deviendra infiniment petite d'un ordre supérieur, quel que soit le rapport $\frac{h}{i}$, si l'on détermine les coefficients A, B, C de manière que l'on ait

(3) $$A + Cp = 0, \quad B + Cq = 0,$$

auquel cas l'équation (2) devient

$$(4) \qquad \zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y).$$

Le plan déterminé par cette équation s'appelle le *plan tangent* à la surface au point (x, y, z).

Les quantités p et q étant déterminées par les équations

$$f'(x) + pf'(z) = 0, \quad f'(y) + qf'(z) = 0,$$

les équations (3) donnent

$$\frac{A}{f'(x)} = \frac{B}{f'(y)} = \frac{C}{f'(z)},$$

et par suite l'équation du plan tangent peut s'écrire sous la forme

$$(5) \qquad f'(x)(\xi - x) + f'(y)(\eta - y) + f'(z)(\zeta - z) = 0.$$

638. Les équations d'une courbe quelconque, tracée par le point M sur la surface, s'obtiennent en joignant l'équation (1) à l'équation d'une autre surface passant par le point M. Si l'on cherche les équations de la tangente en M à l'une de ces courbes, l'une de ces équations ne sera autre chose [627] que l'équation (5); donc les tangentes à toutes les courbes tracées par le point M sur la surface sont situées dans le plan tangent à la surface en ce point.

639. L'équation (5) n'est autre chose que ce que devient l'équation différentielle de la surface

$$dz = p\,dx + q\,dy, \quad \text{ou} \quad f'(x)dx + f'(y)dy + f'(z)dz = 0,$$

lorsqu'on y remplace dx, dy, dz par $\xi - x$, $\eta - y$, $\zeta - z$. C'est donc le lieu des droites données par les équations

$$(6) \qquad \frac{\xi - x}{dx} = \frac{\eta - y}{dy} = \frac{\zeta - z}{dz}.$$

Donc le plan tangent est le lieu des limites des droites qui passent par le point M et par un point de la surface infiniment voisin. Ces limites sont dites les *tangentes* à la surface au point M.

640. Deux de ces tangentes suffisent pour déterminer le plan

tangent; donc le plan tangent est la limite d'un plan mené par le point $M(x, y, z)$ et par deux points $M_{\prime}(x_{\prime}, y_{\prime}, z_{\prime})$ et $M_{\prime\prime}(x_{\prime\prime}, y_{\prime\prime}, z_{\prime\prime})$, pris sur la surface et infiniment voisins de M.

Il faut cependant, pour cela, que les deux sécantes $MM_{\prime}$ et $MM_{\prime\prime}$ aient pour limites des tangentes différentes, sans quoi la limite de leur plan serait indéterminée. Ce dernier cas aurait lieu si les points M, $M_{\prime}$, $M_{\prime\prime}$ étaient situés sur une même courbe quelconque tracée par M. Dans ce cas, les angles M et $M_{\prime\prime}$ du triangle infinitésimal $MM_{\prime}M_{\prime\prime}$ seraient infiniment petits. Or, pour qu'un triangle infinitésimal, tracé sur la surface, détermine à la limite le plan tangent, il faut et il suffit que deux au moins de ses angles aient des limites finies, sans quoi les trois côtés du triangle détermineront le plan osculateur à la courbe $MM_{\prime}M_{\prime\prime}$ et non le plan tangent à la surface. Ce plan osculateur pourra recevoir une direction quelconque si l'on déplace le sommet $M_{\prime}$ d'une quantité infiniment petite du second ordre.

641. La perpendiculaire au plan tangent, menée par le point de contact M, ou la normale commune à toutes les courbes tracées sur la surface par ce point, est dite la *normale* à la surface au point M; elle a pour équations

$$(7)\qquad \xi - x + p(\zeta - z) = 0, \quad \eta - y + q(\zeta - z) = 0,$$

ou

$$(8)\qquad \frac{\xi - x}{f'(x)} = \frac{\eta - y}{f'(y)} = \frac{\zeta - z}{f'(z)}.$$

La normale peut être définie comme la limite de l'intersection commune de tous les plans perpendiculaires sur les milieux des cordes infiniment petites menées par le point M. En effet, un point (ξ, η, ζ) d'un de ces plans étant équidistant des points $M(x, y, z)$ et $M'(x + dx, y + dy, z + dz)$, on a pour ce point

$$d_{x,y,z}[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2] = 0,$$

la différentielle étant prise en considérant ξ, η, ζ comme des constantes, ce qui donne, aux infiniment petits près du second ordre, en remplaçant dz par sa valeur $p\,dx + q\,dy$,

$$(9)\qquad [\xi - x + p(\zeta - z)]\,dx + [\eta - y + q(\zeta - z)]\,dy = 0.$$

Si l'on égale séparément à zéro les coefficients de dx et de dy, on aura les équations d'une droite par laquelle passeront les limites de tous ces plans et qui sera la normale à la surface.

On aurait pu partir de cette dernière définition de la normale, et en déduire réciproquement celle du plan tangent.

642. Tout plan passant par la normale est dit un *plan normal* à la surface. On a l'équation d'un plan normal, en écrivant qu'il est perpendiculaire à une tangente, ce qui donne l'équation (9). Si l'on pose maintenant

$$\frac{dy}{dx} = \lambda, \quad \text{d'où} \quad dz = (p + \lambda q)\,dx,$$

les équations de la tangente seront

$$\xi - x = \frac{\eta - y}{\lambda} = \frac{\zeta - z}{p + \lambda q},$$

ce qui donne, pour l'équation du plan normal,

$$\xi - x + \lambda(\eta - y) + (p + \lambda q)(\zeta - z) = 0,$$

ou

$$[\xi - x + p(\zeta - z)] + \lambda[\eta - y + q(\zeta - z)] = 0,$$

équation qui exprime directement que ce plan passe par la normale (7).

643. Souvent les trois coordonnées x, y, z d'un point de la surface sont exprimées au moyen de deux variables indépendantes u, v. En désignant, pour abréger, par des accents supérieurs les dérivées partielles prises par rapport à u, et par des accents inférieurs les dérivées partielles prises par rapport à v, on a

$$dx = x'du + x_{,}dv, \quad dy = y'du + y_{,}dv, \quad dz = z'du + z_{,}dv.$$

On aura alors, au lieu de la formule (3),

$$\delta = \frac{[A(x' + \varepsilon) + B(y' + \varepsilon') + C(z' + \varepsilon'')]du + [A(x_{,} + \varepsilon_0) + B(y_{,} + \varepsilon_1) + C(z_{,} + \varepsilon_2)]dv}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}};$$

donc δ sera infiniment petit d'ordre supérieur au premier, quels

que soient du et dv, si l'on a à la fois

$$(10)\qquad Ax'+By'+Cz'=0,\quad Ax_{\prime}+By_{\prime}+Cz_{\prime}=0,$$

d'où

$$A:B:C=\begin{vmatrix} y' & z' \\ y_{\prime} & z_{\prime}\end{vmatrix}:\begin{vmatrix} z' & x' \\ z_{\prime} & x_{\prime}\end{vmatrix}:\begin{vmatrix} x' & y' \\ x_{\prime} & y_{\prime}\end{vmatrix}$$
$$=\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}:\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}:\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}.$$

On peut aussi retrouver de cette manière l'équation du n° 637. En effet, en différentiant l'équation (1) par rapport à u et à v, on a

$$f'(x).x'+f'(y).y'+f'(z).z'=0,\quad f'(x).x_{\prime}+f'(y).y_{\prime}+f'(z).z_{\prime}=0.$$

Ces équations, comparées aux équations (10), donnent

$$A:B:C=f'(x):f'(y):f'(z),$$

d'où l'on déduit encore l'équation (5).

644. Étant donnée l'équation (1) d'une surface, soit proposé de mener un plan tangent à cette surface, et passant par un point extérieur (α, β, γ). Les coordonnées du point de contact devront satisfaire à la fois à l'équation (1) et à l'équation (5), en remplaçant dans cette dernière les variables ξ, η, ζ par les valeurs données α, β, γ, ce qui donne

$$(11)\qquad (\alpha-x)f'(x)+(\beta-y)f'(y)+(\gamma-z)f'(z)=0.$$

Cette dernière équation, si l'on y fait varier x, y, z, représente une nouvelle surface, dont l'intersection avec la surface (1) détermine une courbe, lieu des points de contact des plans tangents à la surface (1) et passant par le point (α, β, γ).

Si l'équation (1) est algébrique, l'équation (11) sera du même degré; mais il est facile de voir que l'on pourra la remplacer par une autre, d'un degré moindre d'une unité. En effet, l'ensemble des termes

$$\alpha f'(x)+\beta f'(y)+\gamma f'(z)$$

est du degré $n-1$, n étant le degré de l'équation (1). L'ensemble

des termes

$$-(xf'(x)+yf'(y)+zf'(z)),$$

qui est du degré n, peut, en vertu de l'équation (1), être abaissé à un degré moindre que n. En désignant par f_k l'ensemble des termes du degré k dans le polynôme $f(x, y, z)$, on a [322]

$$xf'_k(x)+yf'_k(y)+zf'_k(z)=kf_k(x, y, z),$$

d'où

$$xf'(x)+yf'(y)+zf'(z)=nf_n+(n-1)f_{n-1}+\ldots+1.f_1.$$

L'équation (1) donne d'ailleurs

$$nf_n+nf_{n-1}+\ldots+nf_1+nf_0=0.$$

En éliminant f_n entre ces deux égalités, il vient

$$xf'(x)+yf'(y)+zf'(z)=-f_{n-1}-2f_{n-2}-\ldots-(n-1)f_{n-1}-nf_0.$$

Donc l'équation (11) peut être remplacée par la suivante :

$$(12)\quad \alpha f'(x)+\beta f'(y)+\gamma f'(z)+f_{n-1}+2f_{n-2}+\ldots+(n-1)f_1+nf_0=0,$$

qui n'est plus que du degré $n-1$, et qui représente une surface passant par l'intersection des deux surfaces (1) et (11).

Si, entre les équations (1) et (11) ou (12) et les équations

$$\frac{\xi-x}{\alpha-x}=\frac{\eta-y}{\beta-y}=\frac{\zeta-z}{\gamma-z}$$

de la tangente à la surface menée par le point (α, β, γ), on élimine les coordonnées x, y, z, on aura l'équation du cône circonscrit à la surface et dont le sommet est au point (α, β, γ).

645. En particulier, si l'équation (1) est du second degré, l'équation du plan tangent sera réductible à la forme

$$\xi f'(x)+\eta f'(y)+\zeta f'(z)+f_1+2f_0=0.$$

En développant cette expression, on voit qu'elle ne change pas, lorsqu'on y remplace x, y, z par ξ, η, ζ, et *vice versa*. On peut donc représenter l'équation du plan tangent sous l'une ou l'autre des deux formes

$$(13)\qquad \xi f'(x)+\eta f'(y)+\zeta f'(z)+f_1(x, y, z)+2f_0=0,$$

$$(14)\qquad xf'(\xi)+yf'(\eta)+zf'(\zeta)+f_1(\xi, \eta, \zeta)+2f_0=0.$$

L'équation (14) montre que la courbe de contact de la surface avec le cône circonscrit qui a pour sommet le point (ξ, η, ζ) est plane.

Cette équation (13) ou (14), qui exprime la dépendance entre les coordonnées du sommet du cône et celles d'un point du *plan de contact*, montre que, si l'un des deux points (ξ, η, ζ), (x, y, z) décrit un plan, l'autre reste fixe, et réciproquement, et que, si l'un de ces points décrit une droite, l'autre décrit également une droite.

646. Le plan tangent sera parallèle à l'un des axes coordonnés, à l'axe des z, par exemple, si le coefficient $f'(z)$ de ζ dans l'équation (5) est nul. Dans ce cas, les deux dérivées partielles

$$p = -\frac{f'(x)}{f'(z)}, \quad q = -\frac{f'(y)}{f'(z)}$$

sont généralement infinies, sauf pour les points, en nombre limité, où le plan tangent serait parallèle à l'un des deux plans coordonnés qui passent par l'axe des z.

Si l'on cherche l'intersection des deux surfaces $f(x, y, z) = 0$, $f'(z) = 0$, on a le lieu des points de la surface donnée pour lesquels le plan tangent est parallèle à l'axe des z. En éliminant z entre ces deux équations, on aura une équation $\varphi(x, y) = 0$, qui représentera soit la projection de la courbe de contact sur le plan des x, y, c'est-à-dire le *contour apparent* de la surface relatif à ce plan; soit le cylindre projetant de cette courbe, c'est-à-dire le cylindre parallèle à l'axe des z et circonscrit à la surface.

On trouverait d'une manière analogue les contours apparents de la surface relatifs aux deux autres plans coordonnés.

647. La condition pour que le plan tangent soit parallèle à une droite donnée

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$$

est exprimée par l'équation

$$af'(x) + bf'(y) + cf'(z) = 0.$$

Cette équation, jointe à $f(x, y, z) = 0$, donnera la *courbe de*

contact, lieu des points de contact des plans tangents parallèles à la droite donnée.

Si l'on élimine x, y, z entre ces équations et les équations

$$\frac{\xi - x}{a} = \frac{\eta - y}{b} = \frac{\zeta - z}{c},$$

on aura pour résultante l'équation en ξ, η, ζ, qui représentera le cylindre circonscrit à la surface et parallèle à la droite donnée.

648. *Lignes de niveau et de plus grande pente.* — Prenons le plan des xy pour *plan horizontal.* On appelle *ligne de niveau* une courbe tracée sur une surface donnée, et dont tous les points sont à une hauteur constante $z = C$ au-dessus du plan horizontal. En d'autres termes, c'est l'intersection de la surface avec un plan horizontal.

Les équations finies d'une ligne de niveau sont

$$f(x, y, z) = 0, \quad z = C,$$

ou, ce qui revient au même,

$$f(x, y, C) = 0, \quad z = C,$$

C étant un paramètre constant pour chaque ligne de niveau, et variant d'une ligne de niveau à l'autre.

En éliminant cette constante par différentiation, il vient

$$dz = 0, \quad \text{ou} \quad p\,dx + q\,dy = 0.$$

Si l'on élimine z entre cette dernière équation et l'équation de la surface, on aura l'équation différentielle, entre x, y, dx, dy, de la projection horizontale d'une ligne de niveau, laquelle est égale à la ligne de niveau elle-même.

649. On appelle *ligne de plus grande pente* une ligne tracée sur la surface, de telle manière que sa tangente en chacun de ses points fasse avec le plan horizontal des x, y un plus grand angle que toute autre tangente à la surface, menée par le même point.

Considérons le plan tangent à la surface au point (x, y, z); celle des droites de ce plan qui fait le plus grand angle avec le plan des x, y est la perpendiculaire à la trace horizontale de ce plan tan-

gent. L'équation de ce plan étant

$$\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y),$$

le coefficient angulaire de sa trace horizontale sera $-\frac{p}{q}$. La perpendiculaire à cette trace a pour projection sur le plan des x, y une droite dont le coefficient angulaire est $+\frac{q}{p}$, et, comme cette projection doit être tangente à la projection de la ligne de plus grande pente, on aura, en un point quelconque de cette ligne,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{q}{p}, \quad \text{ou} \quad \frac{dx}{p} = \frac{dy}{q}.$$

En éliminant z entre cette équation différentielle et l'équation $f(x, y, z) = 0$ de la surface, on aura l'équation différentielle des projections horizontales de toutes les lignes de plus grande pente.

On voit que les projections horizontales des lignes de plus grande pente coupent toutes à angles droits les projections horizontales des lignes de niveau; en d'autres termes, elles en sont les *trajectoires orthogonales*.

Les lignes de niveau et les lignes de plus grande pente elles-mêmes se coupent aussi à angles droits dans l'espace. Elles forment ainsi deux systèmes de lignes, partageant la surface en un système d'éléments ayant la forme de rectangles infiniment petits.

650. *Exemples.* — I. Soit une surface de révolution autour de l'axe des z,

$$z = f(x^2 + y^2).$$

On a

$$p = 2xf'(x^2 + y^2), \quad q = 2yf'(x^2 + y^2).$$

L'équation des lignes de niveau sera

$$\text{const.} = f(x^2 + y^2), \quad \text{ou} \quad x^2 + y^2 = C.$$

Ces lignes sont donc des cercles.

L'équation différentielle des lignes de plus grande pente

$$\frac{dy}{dx} = \frac{q}{p} = \frac{y}{x}$$

donne $y = C'x$. Ces lignes sont donc les intersections de la surface avec des plans passant par l'axe de révolution : ce sont donc les méridiens de la surface.

II. Soit la surface $az = xy$. On trouve, pour l'équation des lignes de niveau, $xy = C$, et pour celles des projections des lignes de plus grande pente, $y^2 - x^2 = C'$. On a ainsi, pour les projections des deux systèmes de lignes, deux systèmes d'hyperboles équilatères orthogonales.

III. Soit une surface à centre du second degré

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = k.$$

L'équation des lignes de niveau sera

$$ax^2 + by^2 = C.$$

On a ensuite

$$ax + bzp = 0, \quad by + czq = 0,$$

d'où l'on tire, pour l'équation différentielle des lignes de plus grande pente,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{by}{ax},$$

ce qui donne, en intégrant,

$$y = C'x^{\frac{b}{a}}.$$

§ III.

THÉORÈMES DE GÉOMÉTRIE INFINITÉSIMALE. — DOUBLE COURBURE DES COURBES NON PLANES. — DÉVELOPPÉES.

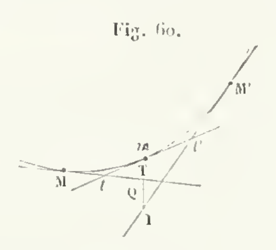
651. Nous avons vu [631] que la plus courte distance de deux tangentes consécutives d'une ligne courbe est un infiniment petit du troisième ordre. Si l'on joint le point M (*fig.* 60) à un point quelconque Q de cette plus courte distance TT', le triangle rectangle MTQ, dont le côté MT est infiniment petit du premier ordre et le côté TQ du troisième, aura son angle en M infiniment petit du second ordre [634]. Donc chacune des tangentes MT, M'T' fait avec le plan MQM' un angle infiniment petit du second ordre.

De plus, la différence entre l'hypoténuse MQ et le côté MT, savoir

$$\sqrt{\overline{MT}^2 + \overline{QT}^2} - MT = \frac{\overline{QT}^2}{\sqrt{\overline{MT}^2 + \overline{QT}^2} + MT} = \frac{\overline{QT}^2}{2\,MT},$$

est un infiniment petit du cinquième ordre. On peut donc, aux quantités près du cinquième ordre, prendre la somme MQ + QM' au lieu de MT + T'M'; ou, ce qui est la même chose, on pourra

Fig. 60.



considérer les tangentes consécutives d'une courbe comme formant un polygone infinitésimal circonscrit à la courbe, lequel aurait pour sommets des points quelconques pris sur les plus courtes distances de deux tangentes consécutives; et l'incertitude sur la longueur de chaque côté de ce polygone est une quantité du cinquième ordre infinitésimal, laquelle n'altère pas, par conséquent, la limite de la somme de ces côtés.

652. Considérons maintenant un arc de courbe fini, et partageons-le en éléments infiniment petits, tels que MM'. Prenons les points de division pour sommets d'un polygone inscrit et pour points de contact d'un polygone circonscrit [651]. On verra, comme dans le cas des courbes planes [538], que :

1° Le périmètre d'un polygone inscrit est toujours moindre que celui d'un polygone circonscrit quelconque;

2° Si l'on introduit de nouveaux points de division, le périmètre du polygone inscrit croît, celui du polygone circonscrit décroît.

En effet, l'angle de chaque tangente avec le plan osculateur étant du second ordre, et chaque tangente différant de sa projection sur ce plan (ou sur le plan MQM') d'un infiniment petit du cinquième ordre, on peut, aux quantités près du cinquième ordre, remplacer

les lignes dans l'espace par leurs projections. Or une inégalité entre deux variables, $U > V$, subsiste encore, lorsqu'on altère ces variables de quantités infiniment petites par rapport à leur différence $U - V$. Soit maintenant tmt' une tangente en un point m, intermédiaire entre M et M'. On a, en considérant les tangentes comme se confondant avec leurs projections sur le plan MQM', le contour $\text{M}tmt'\text{M}' < \text{MTM}'$, égalité indépendante de l'incertitude qui règne sur les longueurs des contours, puisque cette incertitude est du cinquième ordre, tandis que la différence des contours est du troisième [544].

3° Dans le triangle MQM', les angles en M et en M' étant infiniment petits, la différence $(\text{MQ} + \text{QM}') - \text{MM}'$ est du second ordre par rapport à MM' [634].

Donc, lorsqu'on augmente indéfiniment le nombre des points de division, les périmètres des polygones inscrits ou circonscrits vont les uns en croissant, les autres en décroissant, et tendent les uns et les autres vers une limite commune. On démontrerait, par le raisonnement connu [237], que cette limite est indépendante du mode de subdivision de l'arc en éléments infiniment petits. Cette limite s'appelle la *longueur* de l'arc de courbe.

L'arc infiniment petit MM' est compris entre la longueur de sa corde et celle du contour MQM'. Il diffère donc de sa corde MM' d'un infiniment petit du troisième ordre [544]; on aura donc, à un infiniment petit près du troisième ordre,

$$\text{arc}\,\text{MM}' = ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

De plus, l'arc MM' diffère d'un infiniment petit du cinquième ordre de sa projection sur le plan osculateur en un de ses points.

653. Soient M_0, M_1, M_2 trois points infiniment voisins pris sur une courbe non plane; prenons le plan de ces trois points pour plan des xy. En désignant par t la variable indépendante dont les coordonnées sont des fonctions, soient t_0, $t_0 + h$, $t_0 + h + h_1$ les valeurs de t correspondantes aux trois points considérés. Les trois valeurs de z,

$$z_0 = f(t_0), \quad z_1 = f(t_0 + h), \quad z_2 = f(t_0 + h + h_1)$$

seront nulles. On aura donc les équations

$$\begin{aligned} 0 &= z_0, \\ 0 &= z_1 = z_0 + h z'_0 + \frac{1}{2} h^2 z''_0 + \frac{1}{6} h^3 (z'''_0 + \varepsilon), \\ 0 &= z_2 = z_1 + h_1 z'_1 + \frac{1}{2} h_1^2 z''_1 + \frac{1}{6} h_1^3 (z'''_1 + \varepsilon_1). \end{aligned}$$

En combinant la première équation avec la deuxième, et divisant par h, il vient

(1) $$0 = z'_0 + \frac{1}{2} h z''_0 + \frac{1}{6} h^2 (z'''_0 + \varepsilon).$$

On a de même, au moyen de la deuxième et de la troisième,

$$0 = z'_1 + \frac{1}{2} h_1 z''_1 + \frac{1}{6} h_1^2 (z'''_1 + \varepsilon_1).$$

En développant maintenant z'_1, z''_1, z'''_1 de manière à mettre en évidence tous les termes du second ordre, on trouve

$$0 = \left| z'_0 + h z''_0 + \frac{1}{2} h^2 (z'''_0 + \varepsilon') \right| + \frac{1}{2} h_1 [z''_0 + h(z'''_0 + \varepsilon'')] + \frac{1}{6} h_1^2 (z'''_0 + \varepsilon''');$$

d'où, en ayant égard à l'équation (1), puis divisant par $\dfrac{h + h_1}{2}$,

(2) $$0 = z''_0 + \frac{2h + h_1}{3} (z'''_0 + \varepsilon_1).$$

Par l'élimination de z''_0 entre les équations (1) et (2), il vient

(3) $$0 = z'_0 - \frac{h(h + h_1)}{6} (z'''_0 + \varepsilon).$$

Ces équations montrent que z''_0 est infiniment petit du premier ordre, et z'_0 du second.

Si l'on considère maintenant un point correspondant à la valeur $t = t_0 + \theta$ de la variable indépendante, on a, pour ce point,

$$z = \theta z'_0 + \frac{1}{2} \theta^2 z''_0 + \frac{1}{6} \theta^3 (z'''_0 + \varepsilon) = \frac{1}{6} \theta [h(h + h_1) + (2h + h_1)\theta + \theta^2](z'''_0 + \varepsilon),$$

quantité infiniment petite du troisième ordre pour θ infiniment petit. Donc, dans tous les calculs où l'on aura le droit de négliger

les infiniment petits du troisième ordre, on pourra considérer la courbe comme située dans le plan $M_0 M_1 M_2$ pour tous les points infiniment voisins de M_0.

Nous avons vu [632] que le plan osculateur est celui dont la distance à la courbe, dans le voisinage du point de contact, est du troisième ordre. Donc le plan $M_0 M_1 M_2$, passant par trois points de la courbe infiniment voisins, a pour limite le plan osculateur, quel que soit le rapport des cordes $M_0 M_1$, $M_1 M_2$.

De même,

$$z' = z'_0 + \theta z''_0 + \frac{1}{2}\theta^2 (z'''_0 + \varepsilon) = \left[\frac{h(h+h_1)}{6} - \frac{2h+h_1}{3}\theta + \frac{\theta^2}{2}\right] z'''_0 + \varepsilon ;$$

donc z' est infiniment petit du second ordre dans le voisinage de M_0, et il en est de même de l'angle que fait avec le plan $M_0 M_1 M_2$ toute tangente ou toute corde infiniment petite, menée dans le voisinage du point M_0.

Enfin on a

$$z'' = z''_0 + \theta (z'''_0 + \varepsilon) = \left(-\frac{2h+h_1}{3} + \theta\right)(z'''_0 + \varepsilon),$$

quantité infiniment petite du premier ordre; donc la courbure

$$\frac{1}{\rho} = \frac{z''}{(1+z'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

(en prenant $t = x$) de la projection de la courbe sur un plan perpendiculaire à $M_0 M_1 M_2$ est infiniment petite et change généralement de signe avec la différence $\theta - \frac{1}{3}(2h + h_1)$; donc cette projection aura, en général, un point d'inflexion dans le voisinage de M_0. On en conclut que le plan osculateur traverse généralement la courbe au point de contact.

654. Si l'on mène les plans normaux à la courbe en M_0 et en M_1, ces plans formeront, avec les plans normaux aux mêmes points à la projection de la courbe sur le plan $M_0 M_1 M_2$, des angles infiniment petits du second ordre; donc leur intersection rencontrera le plan $M_0 M_1 M_2$ à une distance infiniment petite du point de rencontre des normales en M_0 et M_1 à la projection. Donc le centre

de courbure de la courbe elle-même, c'est-à-dire la limite de l'intersection du plan osculateur avec deux plans normaux infiniment voisins, coïncide avec le centre de courbure de la projection de la courbe sur son plan osculateur.

Nous savons d'ailleurs que le centre de courbure de la projection est aussi la limite du centre d'un cercle passant par les trois points M_0, M_1, M_2; donc le centre de courbure de la courbe proposée est aussi la limite du centre d'un cercle passant par trois points infiniment voisins, lequel centre est l'intersection du plan de ces trois points avec les plans perpendiculaires sur les milieux des cordes $M_0 M_1$, $M_1 M_2$.

655. Soient a, b, c les cosinus des angles qu'une droite mobile fait avec les axes, $d\tau$ l'angle de deux positions de cette droite infiniment voisines. On trouvera, par le même calcul qu'au n° 558, l'équation rigoureuse

$$2\sin\frac{d\tau}{2} = \sqrt{da^2 + db^2 + dc^2},$$

d'où l'on tire, à un infiniment petit près du troisième ordre,

$$(1) \qquad d\tau = \sqrt{da^2 + db^2 + dc^2}.$$

En appliquant cette formule au calcul de l'angle de deux tangentes infiniment voisines ou de l'angle de *contingence*, il vient, en remplaçant a, b, c par $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$,

$$d\tau = \sqrt{\left(d\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dz}{ds}\right)^2}.$$

Le second membre de cette formule représente rigoureusement le double du sinus du demi-angle de deux cordes consécutives, correspondantes aux valeurs $t, t + dt, t + 2dt$ de la variable indépendante, valeurs qui déterminent trois points équidistants, aux infiniment petits près du second ordre. On peut donc prendre, pour l'angle de contingence, l'angle de deux cordes égales consécutives [545].

656. La valeur de $d\tau^2$ peut s'écrire [562]

$$d\tau^2 = \left(d\frac{dx}{ds}\right)^2 + \ldots = \frac{(ds\,d^2x - dx\,d^2s)^2 + \ldots}{ds^4}$$

$$= \frac{ds^2(d^2x^2 + \ldots) - 2\,ds\,d^2s(dx\,d^2x + \ldots) + (dx^2 + \ldots)d^2s^2}{ds^4}$$

$$= \frac{1}{ds^2}(d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2 - d^2s^2).$$

On démontrerait géométriquement cette formule par un raisonnement semblable à celui du n° 563, et ce raisonnement servirait, réciproquement, à démontrer l'égalité entre l'angle de contingence et celui de deux cordes consécutives égales ou infiniment peu différentes.

657. On peut encore établir ces formules comme au n° 560, en projetant sur les trois axes coordonnés le contour d'un triangle isoscèle dont les côtés égaux MT, MT′ sont parallèles à deux tangentes infiniment voisines, et dont le troisième côté TT′ a pour limite une parallèle à la normale à la courbe située dans le plan osculateur, c'est-à-dire à la normale principale, prise dans le sens de la concavité de la projection de la courbe sur le plan osculateur, c'est-à-dire dans le sens qui va vers le centre de courbure.

On en tire, à cause de $TT' = MT.2\sin\frac{1}{2}d\tau = MT.d\tau$, à un infiniment petit près du troisième ordre,

$$d\tau = \frac{da}{\cos\lambda} = \frac{db}{\cos\mu} = \frac{dc}{\cos\nu} = \sqrt{da^2 + db^2 + dc^2},$$

a, b, c étant mis ici pour $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$; donc

$$\cos\lambda = \frac{1}{d\tau}d\frac{dx}{ds}, \quad \cos\mu = \frac{1}{d\tau}d\frac{dy}{ds}, \quad \cos\nu = \frac{1}{d\tau}d\frac{dz}{ds}.$$

658. Si l'on désigne par ρ le rayon de courbure de la courbe au point M, lequel coïncide [654] avec le rayon de courbure de la projection sur le plan osculateur, on aura, comme dans le cas des courbes planes,

$$\rho = \frac{ds}{d\tau},$$

d'où la valeur de la courbure

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\tau}{ds} = \frac{1}{ds}\sqrt{\left(d\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dz}{ds}\right)^2}.$$

Ensuite, en appelant ξ, η, ζ les coordonnées du centre de courbure, on a

$$\xi - x = \rho\cos\lambda = \frac{ds}{d\tau^2}\cdot d\frac{dx}{ds},$$

$$\eta - y = \rho\cos\mu = \frac{ds}{d\tau^2}\cdot d\frac{dy}{ds},$$

$$\zeta - z = \rho\cos\nu = \frac{ds}{d\tau^2}\cdot d\frac{dz}{ds}.$$

659. La valeur de $d\tau^2$ peut encore se mettre sous la forme

$$\begin{aligned} ds^4 d\tau^2 &= (dx^2 + \ldots)(d^2x^2 + \ldots) - (dx\,d^2x + \ldots)^2 \\ &= \begin{vmatrix} dy & dz \\ d^2y & d^2z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} dz & dx \\ d^2z & d^2x \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} dx & dy \\ d^2x & d^2y \end{vmatrix}^2. \end{aligned}$$

Les trois déterminants qui entrent dans cette valeur ne sont autre chose que les trois quantités l, m, n, proportionnelles [633] aux cosinus des angles que le plan osculateur fait avec les trois plans coordonnés. En désignant donc ces trois déterminants par l, m, n, et la somme de leurs carrés par k^2, on a

$$k = \sqrt{l^2 + m^2 + n^2} = ds^2 d\tau.$$

660. Les cosinus des angles du plan osculateur avec les plans coordonnés, ou de l'axe du plan osculateur avec les axes des x, y, z, seront, d'après cela,

$$\frac{l}{k}, \quad \frac{m}{k}, \quad \frac{n}{k}.$$

Donc l'angle de deux plans osculateurs infiniment voisins, que l'on appelle l'*angle de torsion* ou *de seconde courbure* de la courbe, aura pour valeur

$$d\omega = \sqrt{\left(d\frac{l}{k}\right)^2 + \left(d\frac{m}{k}\right)^2 + \left(d\frac{n}{k}\right)^2}.$$

En développant cette expression, il vient

$$d\sigma^2 = \frac{(k\,dl - l\,dk)^2 + \ldots}{k^4} = \frac{k^2(dl^2 + \ldots) - 2k\,dk(l\,dl + \ldots) + (l^2 + \ldots)dk^2}{k^4}$$

$$= \frac{k^2(dl^2 + \ldots) - 2k\,dk.k\,dk + k^2.dk^2}{k^4} = \frac{1}{k^2}(dl^2 + dm^2 + dn^2 - dk^2)$$

$$= \frac{1}{k^4}[(dl^2 + \ldots)(l^2 + \ldots) - (l\,dl + \ldots)^2]$$

$$= \frac{1}{k^4}\left\{ \begin{vmatrix} m & n \\ dm & dn \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} n & l \\ dn & dl \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} l & m \\ dl & dm \end{vmatrix}^2 \right\}.$$

Or on a

$$m\,dn - n\,dm = m(dx\,d^3y - dy\,d^3x) - n(dz\,d^3x - dx\,d^3z)$$
$$= dx(m\,d^3y + n\,d^3z) - (m\,dy + n\,dz)d^3x.$$

D'ailleurs $l\,dx + m\,dy + n\,dz = 0$: donc

$$m\,dn - n\,dm = dx(l\,d^3x + m\,d^3y + n\,d^3z),$$

ou, en posant $\Delta = \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \\ d^3x & d^3y & d^3z \end{vmatrix}$,

$$\begin{vmatrix} m & n \\ dm & dn \end{vmatrix} = dx.\Delta,$$

et de même pour les autres; donc

$$d\sigma = \frac{ds}{k^2}\Delta = \frac{\Delta}{ds^3\,d\tau^2}.$$

Si l'on appelle r le rayon du cercle dont l'angle de contingence est $d\sigma$ pour une même longueur d'arc ds, et que l'on nomme *cercle de seconde courbure* de la courbe proposée, on a, pour déterminer le *rayon de seconde courbure* ou *rayon de torsion*, l'équation

$$\frac{1}{r} = \frac{d\sigma}{ds} = \frac{\Delta}{ds^4\,d\tau^2}.$$

En désignant par δ la distance de deux tangentes consécutives, on a [631]

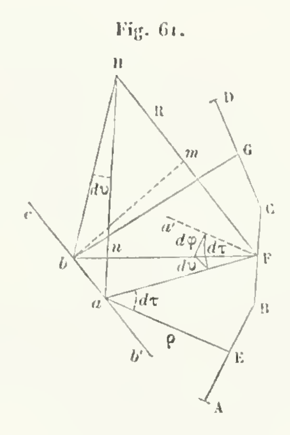
$$\delta = \frac{1}{12}\frac{\Delta}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}} = \frac{\Delta}{12k};$$

d'où l'on tire, en mettant pour k sa valeur,

$$\Delta = 12\delta . ds^2 d\tau, \quad d\upsilon = \frac{12\delta}{ds\, d\tau}, \quad \frac{1}{r} = \frac{12\delta}{ds^2\, d\tau}.$$

661. Considérons trois côtés consécutifs AB, BC, CD (*fig.* 61) d'un polygone infinitésimal, ou trois éléments de la courbe qui est la limite de ce polygone, ces côtés étant de longueurs infiniment peu différentes entre elles. L'intersection de deux plans perpendiculaires sur les milieux de deux côtés consécutifs de ce polygone, ou l'intersection de deux plans normaux consécutifs à la courbe, est une perpendiculaire aH au plan osculateur ABC. Cette perpendiculaire s'appelle l'*axe de courbure* de la courbe au point B.

Fig. 61.



Le centre de courbure est l'intersection a de l'axe de courbure avec le plan osculateur. Le rayon de courbure est $\rho =$ Ea. L'angle de contingence $d\tau$ est égal à l'angle EaF de deux normales consécutives, menées dans le plan osculateur en B, et dont l'une Ea est la normale principale pour le point B.

Le plan normal en F contient deux axes de courbure consécutifs, qui se coupent au centre H de la *sphère osculatrice,* c'est-à-dire de la sphère qui passe par quatre points consécutifs de la courbe.

Les coordonnées du point H s'obtiendront en cherchant l'intersection de trois plans normaux consécutifs, c'est-à-dire en ré-

solvant les équations [556]

$$(1)\quad \begin{cases} (\xi - x)\,dx + (\eta - y)\,dy + (\zeta - z)\,dz = 0, \\ (\xi - x)\,d^2x + (\eta - y)\,d^2y + (\zeta - z)\,d^2z = ds^2, \\ (\xi - x)\,d^3x + (\eta - y)\,d^3y + (\zeta - z)\,d^3z = 3\,ds\,d^2s, \end{cases}$$

dont les deux premières représentent l'axe de courbure. On en tire, en conservant les notations du numéro précédent, et remarquant que l'on a $3u\,dv - v\,du = -v^4\,d\dfrac{u}{v^3}$,

$$\xi - x = -\frac{ds^5}{\Delta}\,d\frac{l}{ds^3}, \quad \eta - y = -\frac{ds^5}{\Delta}\,d\frac{m}{ds^3}, \quad \zeta - z = -\frac{ds^5}{\Delta}\,d\frac{n}{ds^3}.$$

En prenant la racine carrée de la somme des carrés de ces trois expressions, on a, pour le rayon R de la sphère osculatrice,

$$R = \frac{ds^5}{\Delta}\sqrt{\left(d\frac{l}{ds^3}\right)^2 + \left(d\frac{m}{ds^3}\right)^2 + \left(d\frac{n}{ds^3}\right)^2}.$$

662. Si l'on mène Fa' parallèle à Ea, et qu'on appelle $d\varphi$ l'angle bFa' de deux rayons de courbure consécutifs, l'angle trièdre infinitésimal, formé par Fa, Fa', Fb, rectangle suivant Fa, a pour faces de l'angle dièdre droit l'angle de contingence $d\tau$ et l'angle de torsion $d\upsilon$, et l'on aura, par conséquent,

$$(2)\qquad d\varphi^2 = d\tau^2 + d\upsilon^2.$$

Donc, dans les courbes non planes, l'angle de deux rayons de courbure consécutifs est, en général, plus grand que l'angle de contingence.

Il ne serait égal à l'angle de contingence que dans le cas où l'angle de torsion $d\upsilon$ serait nul, ce qui exigerait [660] que l'on eût séparément

$$d\frac{l}{k} = 0, \quad d\frac{m}{k} = 0, \quad d\frac{n}{k} = 0,$$

d'où

$$\frac{l}{k} = C, \quad \frac{m}{k} = C', \quad \frac{n}{k} = C'',$$

$$C\,dx + C'\,dy + C''\,dz = \frac{l\,dx + m\,dy + n\,dz}{k} = 0,$$

et enfin

$$Cx + C'y + C''z + C''' = 0.$$

La courbe serait donc, dans ce cas, une courbe plane.

663. Le quadrilatère $FabH$ est inscriptible à un cercle ayant pour diamètre le rayon $FH = R$ de la sphère osculatrice. Donc ce cercle est tangent au lieu des centres de courbure.

L'angle inscrit $d\upsilon = \frac{\text{l'arc}}{\text{le diamètre}}$. En désignant donc par $d\sigma$ la distance ab de deux centres de courbure consécutifs, on a

(3) $$R = \frac{d\sigma}{d\upsilon}.$$

Le triangle rectangle abn donne

$$ab^2 = bn^2 + an^2,$$

ou

(4) $$d\sigma^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\upsilon^2.$$

On peut donc écrire l'équation (3) sous la forme

(5) $$R = \sqrt{\rho^2 + \frac{d\rho^2}{d\upsilon^2}}.$$

Le triangle FaH étant rectangle, et $Fa = \rho$, on en conclut que la distance du centre de courbure au centre de la sphère osculatrice a pour expression

$$Ha = \frac{d\rho}{d\upsilon},$$

comme on le voit d'ailleurs, en considérant le triangle rectangle Hnb.

Les triangles semblables nab, FaH donnent

(6) $$d\rho = d\sigma \cos(\rho, d\sigma) = d\sigma \sin(\rho, R).$$

L'angle $(\rho, d\sigma) = \frac{\pi}{2} - (\rho, R)$ n'est nul que pour $(\rho, R) = \frac{\pi}{2}$, ce qui donne $R = \infty$, $d\upsilon = 0$ (3), et alors la courbe sera nécessairement plane.

Si l'on mène bm perpendiculaire à FH, on voit facilement que bH et bF sont les deux bissectrices des angles mba, mbc.

664. Le lieu des axes de courbure est une surface développable, appelée *surface polaire*, qui a pour *arête de rebroussement* le lieu des centres de la sphère osculatrice.

L'angle de contingence de cette arête de rebroussement, ou l'angle de deux axes de courbure consécutifs, est égal à l'angle de torsion de la courbe proposée.

L'équation de la surface polaire s'obtient en éliminant x, y, z entre les deux premières équations (1) et les équations de la courbe. Si l'on y joint la troisième équation (1), on aura le lieu du centre de la sphère osculatrice.

Le lieu des centres de courbure est une courbe tracée sur la surface polaire. On aura ses équations, en éliminant x, y, z entre les deux premières équations (1), les équations de la courbe, et celle du plan osculateur.

665. Par un point A, pris sur la courbe, menons une normale quelconque, rencontrant l'axe de courbure $a\alpha$ au point α. Joignons α au point suivant A' de la courbe, et prolongeons $A'\alpha$ jusqu'à la rencontre en α' de l'axe de courbure $a'\alpha'$, correspondant au point A'. Joignons α' au point suivant A'', et prolongeons $A''\alpha'$ jusqu'à la rencontre en α'' de l'axe de courbure $a''\alpha''$, correspondant au point A'' (*fig.* 62). En continuant ainsi, on formera, par

Fig. 62.

les intersections successives des normales, un polygone infinitésimal, dont la limite sera une courbe enveloppe de ces normales, et qui jouira des diverses propriétés que nous avons démontrées (583, 584, 585) pour les développées des courbes planes. On donnera, pour cette raison, le nom de *développées* de la courbe quelconque $AA'A''\ldots$ aux diverses courbes enveloppes des normales, que l'on peut former d'après ce qui précède. Toutes ces développées sont situées sur la surface polaire de la courbe proposée.

Le point de départ α étant pris arbitrairement sur l'axe $a\alpha$, il s'ensuit de là que la courbe a une infinité de développées. Si la courbe est plane, la surface polaire est un cylindre, dont la section droite, intersection du cylindre avec le plan de la courbe, est une développée, qui coïncide avec le lieu des centres de courbure.

Si la courbe n'est pas plane, et que α soit le centre de courbure du point A, $A\alpha$ ne sera pas tangent au lieu des centres de courbure [663]. Donc ce lieu ne coupe chaque développée qu'une seule fois ou qu'un nombre limité de fois.

666. Si l'on fait tourner le plan normal $Aa\alpha$ autour de $a\alpha$, jusqu'à ce qu'il vienne s'appliquer sur le plan normal suivant, $A'a'\alpha'a\alpha$, A décrira un arc de cercle autour du centre de courbure de la courbe en A, et viendra se placer en A', tandis que $A\alpha$ décrira un cône droit autour de l'axe $a\alpha$, pour venir s'appliquer sur $A'\alpha'$. Donc l'angle $A\alpha a = A'\alpha a$, et, par suite, lorsque le plan normal en A tourne autour de l'axe de courbure pour venir passer par A', la ligne $A'\alpha\alpha'$, dans le développement de la surface polaire sur un plan, se trouve recouverte par $A\alpha$. Donc la développée devient une ligne droite. Ainsi toutes les développées sont des lignes *géodésiques* de la surface polaire, c'est-à-dire qu'elles jouissent de la propriété d'être les lignes les plus courtes que l'on puisse mener sur la surface entre deux de leurs points. Ce sont les courbes qu'affecterait un fil tendu sur la surface entre deux points donnés sur celle-ci.

De là un moyen mécanique pour décrire une courbe d'un mouvement continu, à l'aide d'un fil dont un point A est placé en un point donné de la courbe, tandis que les deux moitiés du fil sont tendues sur la surface polaire suivant deux développées différentes. En déroulant les deux branches du fil, le point A décrira la courbe.

Si on laissait le point A fixe, ainsi que son axe de courbure $a\alpha$, et que l'on développât la surface polaire sur le plan $Aa\alpha$, les deux développées viendraient se placer sur les prolongements des deux normales au point A, le fil restant toujours librement tendu. Donc si, au lieu de faire mouvoir la surface polaire, on fait mouvoir son plan tangent $Aa\alpha$, les deux branches du fil formeront toujours un angle constant. Et réciproquement, une ligne située dans le plan tangent

mobile, et faisant avec αA un angle constant, sera constamment tangente à une seconde développée de la courbe $AA'A''A'''\ldots$.

Si la courbe donnée est, par exemple, une développante du cercle, toutes ses développées seront des hélices tracées sur le cylindre qui a pour base la développée plane, c'est-à-dire le cercle.

667. On a les équations différentielles des développées d'une courbe, en écrivant :

1° Que la tangente à la développée rencontre la courbe proposée, ce qui donne les équations

$$(7)\qquad \frac{\xi - x}{d\xi} = \frac{\eta - y}{d\eta} = \frac{\zeta - z}{d\zeta};$$

2° Que cette tangente est située dans le plan normal à la courbe, ce qui donne

$$(8)\qquad (\xi - x)\,dx + (\eta - y)\,dy + (\zeta - z)\,dz = 0.$$

De ces équations, il résulte que :

1° En remplaçant $\xi - x$, $\eta - y$, $\zeta - z$ par les quantités qui leur sont proportionnelles, en vertu des équations (7), on a

$$(9)\qquad d\xi\,dx + d\eta\,dy + d\zeta\,dz = 0,$$

ce qui exprime, comme on devait s'y attendre, que la tangente à la développée est normale à la courbe.

2° En différentiant l'équation (8) et ayant égard à la condition (9), il vient

$$(10)\qquad (\xi - x)\,d^2x + (\eta - y)\,d^2y + (\zeta - z)\,d^2z = ds^2.$$

Or l'ensemble des équations (8) et (10) représente la surface polaire [664]. Donc, comme nous l'avions déjà vu d'une autre manière [665], toutes les développées sont situées sur la surface polaire, ce qui fait déjà connaître, sous forme finie, une équation commune à toutes ces courbes.

3° En appelant $d\sigma$ l'élément d'arc de la développée, et ρ la distance $A\alpha$ des points (x, y, z) et (ξ, η, ζ), les équations (1)

donnent

$$\frac{\xi - x}{d\xi} = \frac{\eta - y}{d\eta} = \frac{\zeta - z}{d\zeta} = \pm \frac{\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}}{\sqrt{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2}}$$

$$= \pm \frac{\rho}{d\sigma} = \frac{(\xi - x)\,d\xi + (\eta - y)\,d\eta + (\zeta - z)\,d\zeta}{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2}.$$

Or, en vertu de l'équation (8), le numérateur de la dernière fraction est égal à $\rho\,d\rho$; donc

$$\pm \frac{\rho}{d\sigma} = \frac{\rho\,d\rho}{d\sigma^2}, \quad \text{d'où} \quad d\rho = \pm\,d\sigma,$$

propriété analogue à celle que nous avons démontrée [577] pour les développées planes des courbes planes.

4° Pour obtenir l'équation générale des projections des développées sur le plan des xy, par exemple, on tirera des équations (8) et (10) les valeurs de ζ et de la variable indépendante t en fonction de ξ et de η, ce qui donnera aussi, au moyen des équations de la courbe, les valeurs de x et de y en ξ et η. En substituant ces valeurs dans l'équation

$$\frac{\xi - x}{d\xi} = \frac{\eta - y}{d\eta},$$

on aura une équation différentielle du premier ordre entre ξ, η, $\frac{d\eta}{d\xi}$, dont l'intégration donnera une équation finie entre ξ, η et une constante arbitraire. Cette relation, jointe à l'équation de la surface polaire, représentera toutes les développées de la courbe proposée.

§ IV.

COURBURE D'UNE SURFACE EN UN POINT DONNÉ.

668. Proposons-nous d'étudier les lois qui régissent la courbure des diverses courbes que l'on peut tracer sur une surface par un de ses points.

Soit MM′ (*fig.* 63) une courbe quelconque tracée sur une surface, et soit MM″ la section faite dans la surface par le plan oscu-

lateur à cette courbe au point M. Du point M', infiniment voisin de M, abaissons M'P perpendiculaire sur le plan osculateur; menons PM'' perpendiculaire sur MM'', et joignons les points M', M''. Le plan MM'M'' ayant pour limite [640] le plan tangent à la surface, puisque M'M'' fait un angle fini avec MM', l'angle M'M''P sera fini, si le plan osculateur de la courbe MM' fait un angle fini

Fig. 63.



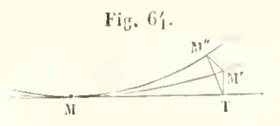
avec le plan tangent à la surface en M. Donc M'P et M'M'' sont des infiniment petits du même ordre, et par conséquent M'M'' sera du troisième ordre [632]. On pourra donc négliger M'M'' toutes les fois que l'on n'aura à tenir compte dans le calcul que des infiniment petits du second ordre, pour la recherche des limites de rapports. Il en est de même de la différence de longueur entre MM' et MM'', laquelle sera infiniment petite d'ordre supérieur au second; donc, dans le calcul de la courbure de la courbe MM' au point M, on pourra substituer à cette courbe la section plane MM'', faite par son plan osculateur.

Donc, pour étudier les courbures des différentes courbes que l'on peut tracer sur une surface par un point donné, il suffit d'étudier les courbures de toutes les *sections planes* de la surface menées par ce point.

669. *Théorème de Meusnier.* — Si l'on considère toutes les sections planes qui ont même tangente, les courbures de toutes ces sections sont liées par une relation très-simple à la courbure de la *section normale* menée par cette tangente.

Soient MT (*fig.* 64) la tangente commune, MM' la section normale, et MM'' une section oblique, dont le plan fait avec celui de

Fig. 64.



male, et MM'' une section oblique, dont le plan fait avec celui de MM' un angle ε. Par le point T de la tangente, infiniment voisin

du point M, menons un plan perpendiculaire à cette tangente, qui coupe les deux courbes en M′ et en M″. Les distances M′T, M″T étant du second ordre [504], les arcs MM′, MM″ ne différeront de MT et entre eux [544] que d'infiniment petits du troisième ordre. De plus, les angles M′MT, M″MT des cordes avec la tangente sont les demi-angles de contingence [541] correspondants à la longueur d'arc MM′ = MM″ = ds; donc les rayons de courbure des deux courbes sont

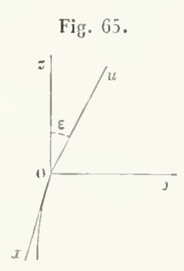
$$\rho = \frac{ds}{2\,\text{M}'\text{MT}} = \frac{ds^2}{2\,\text{M}'\text{T}},\quad \rho' = \frac{ds}{2\,\text{M}''\text{MT}} = \frac{ds^2}{2\,\text{M}''\text{T}}.$$

D'autre part, le triangle M′M″T est rectangle en M′, puisque le plan MM′M″ a pour limite le plan tangent, lequel est perpendiculaire au plan normal MTM′; donc M′T = M″T $\cos\varepsilon$, et par suite

$$\rho' = \rho\cos\varepsilon.$$

670. Autrement, prenons le plan tangent pour plan des xy et la section normale pour plan des zx. Soient $x\text{O}u$ (*fig.* 65) le plan

Fig. 65.



de la section oblique, u son ordonnée parallèle à Ou. Son rayon de courbure sera

$$\rho' = \frac{(dx^2 + du^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2u}.$$

Or on a

$$z = u\cos\varepsilon,\quad y = u\sin\varepsilon,\quad dz = du\cos\varepsilon = p\,dx + q\,dy,$$
$$d^2z = d^2u\cos\varepsilon,\quad dy = du\sin\varepsilon.$$

De plus, puisqu'on a pris le plan tangent pour plan des xy, on doit avoir $p = q = 0$, d'où résulte, aux infiniment petits près du

second ordre,

$$dz = 0, \quad du = 0, \quad dy = 0;$$

puis, r, s, t représentant les dérivées partielles du second ordre $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$,

$$d^2 z = p\, d^2 x + q\, d^2 y + r\, dx^2 + 2s\, dx\, dy + t\, dy^2 = r\, dx^2;$$

donc

$$d^2 u = \frac{r}{\cos\varepsilon}\, dx^2.$$

En substituant ces valeurs dans l'expression de ρ' il vient

$$\rho' = \frac{\cos\varepsilon}{r}.$$

Pour $\varepsilon = 0$, $\rho' = \frac{1}{r} =$ le rayon de courbure ρ de la section normale ; donc

$$\rho' = \rho \cos\varepsilon.$$

On conclut de là que si, sur ρ comme diamètre et dans un plan perpendiculaire à la tangente commune, on décrit un cercle, ce cercle sera le lieu des centres de courbure de toutes les sections tangentes à cette tangente commune.

671. *Théorème d'Euler.* — Considérons maintenant les courbures des diverses sections normales menées par un même point de la surface.

En supposant toujours que le plan tangent en ce point soit pris pour plan des xy, on a, pour x et y infiniment petits,

$$z = \frac{1}{2}(rx^2 + 2sxy + ty^2) + \varepsilon_3,$$

ε_3 étant un infiniment petit du troisième ordre ; donc la surface se confond, aux infiniment petits près du troisième ordre, avec le paraboloïde qui a pour équation

$$z = \frac{1}{2}(rx^2 + 2sxy + ty^2),$$

et que l'on nomme le *paraboloïde osculateur* à la surface au point

considéré. Les sections normales de ce paraboloïde ont donc même courbure que les sections correspondantes de la surface.

Soit une section normale quelconque, menée par l'axe Mz et le point M$'(x, y, z)$, infiniment voisin de M. On a, aux infiniment petits près d'ordre supérieur au premier,

$$\mathrm{MM}' = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

D'ailleurs l'angle de contingence $d\tau = \frac{2z}{\mathrm{MM}'}$; donc la courbure de la section a pour valeur

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\tau}{\mathrm{MM}'} = \frac{2z}{\mathrm{MM}'^2}.$$

Si l'on appelle φ l'angle du plan $z\mathrm{MM}'$ avec le plan des zx, on aura

$$x = \mathrm{MM}'.\cos\varphi, \quad y = \mathrm{MM}'.\sin\varphi,$$

d'où

$$(1) \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{rx^2 + 2sxy + ty^2}{\mathrm{MM}'^2} = r\cos^2\varphi + 2s\sin\varphi\cos\varphi + t\sin^2\varphi.$$

En considérant maintenant tous les points de la section faite dans la surface par un plan parallèle au plan tangent et mené à une distance infiniment petite (du second ordre par rapport aux dimensions de la section) de ce plan tangent, les courbures $\frac{1}{\rho}$ des sections normales passant par ces divers points seront proportionnelles aux inverses $\frac{1}{\mathrm{MM}'^2}$ des carrés des demi-diamètres de cette section, qui est une courbe du second degré, ayant pour équation

$$(2) \qquad rx^2 + 2sxy + ty^2 = 2z = \text{const.}$$

Cette courbe s'appelle l'*indicatrice* de la surface au point M. On peut la remplacer, dans cette étude, par une conique semblable quelconque.

La discussion de ces demi-diamètres, ou, ce qui revient au même, la discussion directe de l'équation (1), fera connaître les valeurs de la courbure tout autour du point M.

672. Si l'on mène les axes principaux de la conique, lesquels

correspondent aux valeurs maximum et minimum du carré du demi-diamètre, on aura les sections principales de la surface, correspondantes à un minimum et à un maximum de la courbure. Pour trouver ce maximum et ce minimum, considérons $\frac{1}{\rho}$ comme une fonction de φ. On aura

$$D_\varphi \frac{1}{\rho} = 2(t-r)\cos\varphi\sin\varphi + 2s(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) = (t-r)\sin 2\varphi + 2s\cos 2\varphi,$$

quantité qui s'annulera pour

$$\operatorname{tang} 2\varphi = \frac{2s}{r-t}.$$

Cette valeur de $\operatorname{tang} 2\varphi$ déterminera deux directions rectangulaires entre elles, répondant aux angles φ_1, φ_2. On a ensuite

$$\frac{1}{2} D_\varphi^2 \frac{1}{\rho} = (t-r)\cos 2\varphi - 2s\sin 2\varphi = -\frac{\cos 2\varphi}{r-t}[(r-t)^2 + 4s^2],$$

quantité qui change de signe lorsqu'on fait tour à tour $\varphi = \varphi_1$ et $\varphi = \varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\pi}{2}$: donc l'une des directions répond à un maximum de $\frac{1}{\rho}$, l'autre à un minimum.

673. Si l'on prend les axes principaux de l'indicatrice pour axes coordonnés, le terme en xy disparaît. On a donc alors $s = 0$. Ainsi les axes principaux de l'indicatrice ont la propriété de faire évanouir $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$, lorsqu'on les prend pour axes des x et des y, ce qui simplifie l'expression de la courbure.

Si l'indicatrice est une ellipse, ou si l'on a

$$rt - s^2 > 0,$$

il vient alors

$$z = \frac{1}{r}[(rx + sy)^2 + (rt - s^2)y^2],$$

quantité de signe constant, comme l'est aussi ρ ; donc alors la surface est tout entière d'un même côté du plan tangent : elle est dite *uniconvexe*.

Si l'indicatrice est un cercle, toutes les valeurs de ρ sont égales

entre elles. Le point de la surface est dit alors un *ombilic* ou un *point de courbure sphérique*.

Dans le cas de l'indicatrice elliptique, on a, au point considéré, un maximum ou un minimum de l'ordonnée z, perpendiculaire à un plan parallèle au plan tangent. On voit alors quelle est la signification géométrique de la condition $rt - s^2 > 0$, qui doit avoir lieu [403] pour que la fonction z ait un maximum ou un minimum.

Si l'indicatrice est hyperbolique, c'est-à-dire si l'on a

$$rt - s^2 < 0,$$

cette indicatrice se composera des deux hyperboles conjuguées, dont l'une correspondra aux valeurs positives de z et de ρ, l'autre aux valeurs négatives. Les asymptotes seront les lignes de séparation des deux régions de la surface dont les courbures sont de sens contraire : elles sont tangentes à l'intersection de la surface avec le plan tangent, et elles correspondent aux valeurs de l'angle φ données par l'équation

$$\tang\varphi = \frac{-s \pm \sqrt{s^2 - rt}}{t}.$$

Pour ces directions, on a la courbure $\frac{1}{\rho} = 0$. Ce sont les sections de courbure nulle.

Si l'on a

$$rt - s^2 = 0,$$

l'équation de l'indicatrice peut se mettre sous la forme

$$(3) \qquad \frac{1}{r}(rx + sy)^2 = 2z,$$

et elle représente deux droites parallèles, dont la direction correspond à $\frac{1}{\rho} = 0$. Pour toutes les autres directions, $\frac{1}{\rho}$ a un signe constant; $\frac{1}{\rho}$ est maximum pour la direction perpendiculaire aux droites (3), c'est-à-dire pour une valeur de φ telle que l'on ait

$$\tang\varphi = \frac{s}{r} = \frac{t}{s}.$$

674. Soient R, R′ les *rayons de courbure principaux*, c'est-à-dire les rayons de courbure des *sections principales*. Les demi-axes de l'indicatrice seront $\sqrt{2zR}$ et $\sqrt{2zR'}$, et l'équation de l'indicatrice, rapportée à ces axes, sera

$$\frac{x^2}{R} + \frac{y^2}{R'} = 2z,$$

d'où l'on tire, en posant [671] $x = MM' \cos\varphi$, $y = MM' \sin\varphi$, $\rho = \frac{MM'^2}{2z}$,

$$(4) \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{\cos^2\varphi}{R} + \frac{\sin^2\varphi}{R'}.$$

Telle est l'expression de la courbure d'une section faisant un angle φ avec la section principale dont la courbure est $\frac{1}{R}$.

Pour $rt - s^2 = 0$, $R' = \infty$, et l'équation précédente se réduit à

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\cos^2\varphi}{R},$$

R étant le minimum du rayon de courbure.

Si l'on désigne par ρ_1 le rayon de courbure de la section perpendiculaire à celle que fait l'angle φ avec l'axe des x, la formule (4) donnera, en changeant φ en $\varphi + \frac{\pi}{2}$,

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{\sin^2\varphi}{R} + \frac{\cos^2\varphi}{R'},$$

d'où l'on tire

$$\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R'},$$

ce qui correspond à une propriété connue des diamètres rectangulaires d'une conique.

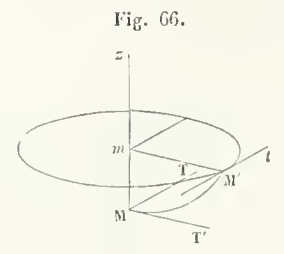
Pour $rt - s^2 = 0$, cette dernière relation se réduit à

$$\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{R}.$$

675. Soit M′ (*fig.* 66) un point quelconque de l'indicatrice.

La tangente à l'indicatrice en ce point est parallèle au conjugué du diamètre mM', mené au point de contact. Si l'on mène par $M't$ le plan tangent à la surface, la trace de ce plan sur le plan tangent en M sera parallèle à $M't$, et par suite aussi au diamètre conjugué

Fig. 66.



de mM'. Donc cette intersection et le diamètre mM' ont pour limites respectives deux tangentes à la surface, MT et MT', parallèles à deux diamètres conjugués de l'indicatrice. Ces tangentes sont dites des *tangentes conjuguées*, et les sections normales correspondantes, des *sections conjuguées*.

Si ρ et ρ' sont les rayons de courbure de ces sections, α leur angle, on a, par les théorèmes d'Apollonius,

$$\rho + \rho' = R + R', \quad \rho\rho' \sin^2\alpha = RR'.$$

§ V.

CALCUL DES ÉLÉMENTS DE LA COURBURE D'UNE SURFACE EN UN QUELCONQUE DE SES POINTS. — OMBILICS.

676. Soient, sur une surface, M et M' deux points infiniment voisins; MN, M'N' les normales à la surface en ces points; MAM' la section normale de la surface, faite par le plan NMM' (*fig.* 67); O le centre de courbure de cette section, $d\tau$ son angle de contingence.

Si nous menons les plans tangents en M et en M', l'intersection BB' de ces deux plans et la corde MM' auront pour limites deux tangentes conjuguées. Soit $\theta = \text{MAB}$ l'angle de ces deux tangentes.

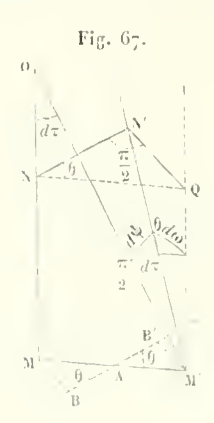
Par les normales MN, M'N' menons deux plans perpendiculaires

à BB'. Ces plans détermineront la plus courte distance

$$BB' = NN' = \delta$$

des deux normales infiniment voisines. BB' est la projection de

Fig. 67.



MAM' = ds sur une direction faisant avec ds l'angle θ. Donc cette plus courte distance aura pour expression

(1) $$\delta = ds\cos\theta.$$

Les normales en deux points infiniment voisins ne se rencontrent donc que lorsqu'on a $\cos\theta = 0$, ou lorsque les deux tangentes conjuguées sont rectangulaires entre elles, ce qui a lieu seulement lorsque MM' est une *section principale*.

677. Menons par M' une parallèle M'Q à MN. Les deux droites M'O, M'N' étant perpendiculaires à AM', leur plan sera perpendiculaire au plan NMAM'QO, qui passe par AM'. Donc l'angle trièdre M'OQN' est rectangle suivant M'O.

De plus, les plans B'M'QN', OM'N', respectivement perpendiculaires à AB', AM', font entre eux le même angle θ que ces deux droites.

Si donc on désigne par $d\omega$ l'angle QM'N' des deux normales ou des deux plans tangents en M et en M', et par $d\psi$ l'*angle de déviation* de la normale, c'est-à-dire l'angle OM'N' que fait la normale en M' avec le plan NMM'Q de la section normale en M,

l'angle trièdre M′ON′Q sera mesuré par un triangle sphérique infinitésimal, qui aura pour angles $\frac{\pi}{2}$, θ, $\frac{\pi}{2}-\theta$, et pour côtés respectivement opposés $d\omega$, $d\tau$, $d\psi$. On aura donc

(2) $$d\omega = \frac{d\tau}{\sin\theta} = \frac{d\psi}{\cos\theta}.$$

Pour obtenir enfin la distance du point M au pied N de la perpendiculaire NN′, commune aux deux normales consécutives, menons NQ perpendiculaire à M′Q (et parallèle à MM′); N′Q sera aussi perpendiculaire à M′Q (et parallèle à B′M′). L'angle $N'QN = B'M'A = \frac{\pi}{2} - \theta$; l'angle $N'NQ = B'AM' = \theta$, d'où $NN'Q = \frac{\pi}{2}$, et par suite NN′ est perpendiculaire au plan M′N′Q. D'ailleurs $NQ = ds$; donc $N'Q = M'Q.d\omega = ds\sin\theta$, et par suite

(3) $$M'Q = MN = \frac{ds}{d\omega}\sin\theta.$$

D'après ces équations, si nous connaissons $d\omega$ et θ, nous en pourrons déduire les valeurs des angles $d\tau$, $d\psi$ et des distances δ, MN, d'où l'on tirera le rayon de courbure de la section normale MM′, $\rho = \frac{ds}{d\tau}$.

678. En appelant α, β, γ les cosinus des angles que fait la normale MN avec les axes coordonnés, on a d'abord [655]

(4) $$d\omega = \sqrt{d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2}.$$

Pour avoir θ, il faut chercher l'intersection des plans tangents en M et en M′, puis l'angle que cette intersection fait avec MM′. L'équation du plan tangent en M est

$$\alpha(\xi - x) + \beta(\eta - y) + \gamma(\zeta - z) = 0.$$

En différentiant cette équation par rapport aux coordonnées de la surface [556], et remarquant que l'on a, par la propriété de la normale,

(5) $$\alpha\,dx + \beta\,dy + \gamma\,dz = 0,$$

on trouve

$$d\alpha(\xi - x) + d\beta(\eta - y) + d\gamma(\zeta - z) = 0.$$

En combinant ces deux équations, il vient, pour les équations de BB′,

$$\frac{\xi - x}{A} = \frac{\eta - y}{B} = \frac{\zeta - z}{C},$$

en posant

$$A = \begin{vmatrix} \beta & \gamma \\ d\beta & d\gamma \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} \gamma & \alpha \\ d\gamma & d\alpha \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ d\alpha & d\beta \end{vmatrix}.$$

On a maintenant

$$\begin{aligned} A^2 + B^2 + C^2 &= (\beta\,d\gamma - \gamma\,d\beta)^2 + \ldots \\ &= (\beta^2 + \gamma^2)\,d\alpha^2 + \ldots - 2(\beta\gamma\,d\beta\,d\gamma + \ldots) \\ &= (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2) \\ &\quad - 2(\beta\gamma\,d\beta\,d\gamma + \ldots) - (\alpha^2\,d\alpha^2 + \ldots) \\ &= (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2) - (\alpha\,d\alpha + \beta\,d\beta + \gamma\,d\gamma)^2, \end{aligned}$$

ou, à cause de $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, d'où $\alpha\,d\alpha + \beta\,d\beta + \gamma\,d\gamma = 0$,

$$A^2 + B^2 + C^2 = d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2 = d\omega^2.$$

Donc les cosinus des angles de BB′ avec les axes sont

$$\frac{A}{d\omega}, \quad \frac{B}{d\omega}, \quad \frac{C}{d\omega}.$$

Les cosinus des angles de MM′ avec les axes étant

$$\frac{dx}{ds}, \quad \frac{dy}{ds}, \quad \frac{dz}{ds},$$

on en conclut, pour le cosinus de l'angle cherché,

$$(6) \qquad \cos\theta = \frac{A\,dx + B\,dy + C\,dz}{d\omega\,ds} = \frac{1}{d\omega\,ds}\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ d\alpha & d\beta & d\gamma \\ dx & dy & dz \end{vmatrix}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} (d\omega\,ds\sin\theta)^2 &= (A^2 + B^2 + C^2)(dx^2 + dy^2 + dz^2) - (A\,dx + B\,dy + C\,dz)^2 \\ &= \begin{vmatrix} B & C \\ dy & dz \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} C & A \\ dz & dx \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} A & B \\ dx & dy \end{vmatrix}^2. \end{aligned}$$

Or on a

$$\begin{vmatrix} B & C \\ dy & dz \end{vmatrix} = (\gamma\, d\alpha - \alpha\, d\gamma)\, dz - (\alpha\, d\beta - \beta\, d\alpha)\, dy$$
$$= d\alpha(\alpha\, dx + \beta\, dy + \gamma\, dz) - \alpha(d\alpha\, dx + \ldots),$$

ou, en vertu de l'équation (5),

$$\begin{vmatrix} B & C \\ dy & dz \end{vmatrix} = -\alpha(d\alpha\, dx + d\beta\, dy + d\gamma\, dz),$$

et de même pour les termes analogues. Donc, à cause de

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1,$$

on a

$$(7)\qquad \sin\theta = \frac{d\alpha\, dx + d\beta\, dy + d\gamma\, dz}{d\omega\, ds}.$$

On conclut de là et des équations (2)

$$(8)\qquad d\tau = d\omega \sin\theta = \frac{d\alpha\, dx + d\beta\, dy + d\gamma\, dz}{ds},$$

$$(9)\qquad d\psi = d\omega \cos\theta = \frac{1}{ds}\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ d\alpha & d\beta & d\gamma \\ dx & dy & dz \end{vmatrix}.$$

$$(10)\qquad \frac{1}{\rho} = \frac{d\tau}{ds} = \frac{d\alpha\, dx + d\beta\, dy + d\gamma\, dz}{ds^2}.$$

679. Si l'on suppose l'équation de la surface donnée sous la forme $F(x, y, z) = 0$, et que l'on représente par

$$(11)\qquad X\, dx + Y\, dy + Z\, dz = 0$$

sa différentielle, on aura, en posant $S = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$, pour abréger,

$$\alpha = \frac{X}{S},\quad \beta = \frac{Y}{S},\quad \gamma = \frac{Z}{S},$$

d'où l'on tire, par un calcul semblable à celui du n° 660,

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} d\omega &= \sqrt{\left(d\frac{X}{S}\right)^2 + \left(d\frac{Y}{S}\right)^2 + \left(d\frac{Z}{S}\right)^2} \\ &= \frac{1}{S}\sqrt{dX^2 + dY^2 + dZ^2 - dS^2}, \\ &= \frac{1}{S^2}\sqrt{\begin{vmatrix} Y & Z \\ dY & dZ \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} Z & X \\ dZ & dX \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} X & Y \\ dX & dY \end{vmatrix}^2}. \end{aligned}\right.$$

On a ensuite, à cause de

$$\begin{vmatrix} \frac{Y}{S} & \frac{Z}{S} \\ d\frac{Y}{S} & d\frac{Z}{S} \end{vmatrix} = \frac{1}{S^2}\begin{vmatrix} Y & Z \\ dY & dZ \end{vmatrix}, \quad \text{etc.}\ldots,$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ da & db & dc \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} = \frac{1}{S^2}\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ dX & dY & dZ \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} = \frac{\Delta}{S^2},$$

en désignant par Δ le dernier déterminant. De plus, à cause de (11),

$$dx\,d\frac{X}{S} + dy\,d\frac{Y}{S} + dz\,d\frac{Z}{S} = \frac{dX\,dx + dY\,dy + dZ\,dz}{S}.$$

Substituant ces valeurs dans les équations (6), (7), il vient

$$(13)\qquad \cos\theta = \frac{\Delta}{S^2\,ds\,d\omega}, \qquad \sin\theta = \frac{dX\,dx + dY\,dy + dZ\,dz}{S\,ds\,d\omega},$$

d'où l'on tire ensuite les expressions de $d\tau$, $d\psi$, δ, etc.

Si l'on introduit les dérivées partielles p, q, il vient, en posant $k = \sqrt{p^2 + q^2 + 1}$,

$$X = p, \quad Y = q, \quad Z = -1, \quad S = k;$$

d'où l'expression (12) devient

$$(14)\qquad d\omega = \frac{1}{k^2}\sqrt{dp^2 + dq^2 + (p\,dq - q\,dp)^2}.$$

On a ensuite

$$(5)\quad \cos\theta = \frac{(p\,dq - q\,dp)\,dz + dq\,dx - dp\,dy}{k^2\,d\omega\,ds}, \quad \sin\theta = \frac{dp\,dx + dq\,dy}{k\,d\omega\,ds}.$$

On peut parvenir d'une autre manière aux formules précédentes. Les équations de la normale étant

$$\frac{\xi - x}{X} = \frac{\eta - y}{Y} = \frac{\zeta - z}{Z},$$

on a [630], pour la distance des deux normales consécutives,

$$\delta = \frac{\Delta}{\sqrt{\begin{vmatrix} Y & Z \\ dY & dZ \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} Z & X \\ dZ & dX \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} X & Y \\ dX & dY \end{vmatrix}^2}}.$$

On voit d'ailleurs, comme au numéro précédent, que le dénominateur de cette expression a pour valeur $S^2 d\omega$. Donc l'équation (1) donnera

$$\cos\theta = \frac{\delta}{ds} = \frac{\Delta}{S^2\,ds\,d\omega}.$$

On obtiendra ensuite $\sin\theta$ comme au n° 678.

En faisant $X = \alpha$, $Y = \beta$, $Z = \gamma$, $S = 1$, on aurait les formules du n° 678.

680. *Détermination des sections principales et des rayons de courbure principaux.* — Si MM' est une section principale, on doit avoir [676] $\cos\theta = 0$, c'est-à-dire [678]

$$A\,dx + B\,dy + C\,dz = 0,$$

équation qui, jointe à l'équation (5), $\alpha\,dx + \beta\,dy + \gamma\,dz = 0$, donne

$$dx : dy : dz = \begin{vmatrix} B & C \\ \beta & \gamma \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} C & A \\ \gamma & \alpha \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} A & B \\ \alpha & \beta \end{vmatrix}.$$

Or

$$\begin{vmatrix} B & C \\ \beta & \gamma \end{vmatrix} = \gamma(\gamma\,d\alpha - \alpha\,d\gamma) - \beta(\alpha\,d\beta - \beta\,d\alpha)$$
$$= d\alpha(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - \alpha(\alpha\,d\alpha + \beta\,d\beta + \gamma\,d\gamma) = d\alpha,$$

et de même pour les autres. Donc les sections principales sont déterminées par les équations

$$(16)\qquad \frac{dx}{d\alpha} = \frac{dy}{d\beta} = \frac{dz}{d\gamma},$$

qui sont la conséquence l'une de l'autre, comme on le voit en ajoutant les rapports terme à terme, après avoir multiplié leurs deux termes respectivement par α, β, γ, et ayant égard à l'équation (5) et à ce que $\alpha\,d\alpha + \beta\,d\beta + \gamma\,d\gamma = 0$.

Si l'on élimine z et dz entre les équations (16) et l'équation de la surface [dont les équations (16) comprennent la différentielle], on obtiendra une équation différentielle entre x, y et $\frac{dy}{dx}$, qui déterminera le coefficient d'inclinaison de la projection de la tangente à la section principale sur le plan des xy.

De plus, $\sin\theta$ étant égal à l'unité, on a, pour une section principale,

$$d\tau = d\omega = \sqrt{d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2},$$

et par conséquent les équations (16) donneront

$$\frac{dx}{d\alpha} = \frac{dy}{d\beta} = \frac{dz}{d\gamma} = \pm\frac{ds}{d\tau} = \pm R.$$

Si, après l'élimination de dz, on pose

$$d\alpha = \alpha_1\,dx + \alpha_2\,dy,\quad d\beta = \beta_1\,dx + \beta_2\,dy,\quad \frac{dy}{dx} = m,$$

les équations précédentes pourront s'écrire, en prenant pour R le signe inférieur, d'après ce que nous verrons plus loin,

$$(17)\qquad \alpha_1 + \alpha_2 m = \beta_1\frac{1}{m} + \beta_2 = -\frac{1}{R}.$$

On en tire d'abord

$$(18)\qquad \alpha_2 m^2 + (\alpha_1 - \beta_2)m - \beta_1 = 0,$$

équation qui donne pour m deux valeurs, correspondantes aux deux sections principales, et à chacune desquelles appartient une valeur de R.

On pourrait aussi former directement l'équation du second de-

gré qui donne les deux rayons de courbure principaux. En effet, si l'on égale entre elles les deux valeurs de m en fonction de $\frac{1}{R}$, que donnent les équations (17), on a

$$(19)\qquad \left(\frac{1}{R}\right)^2 + (\alpha_1 + \beta_2)\frac{1}{R} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Une des courbures principales est nulle [673] lorsqu'on a

$$(20)\qquad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} = 0.$$

681. On peut parvenir aux équations (16) d'une autre manière. Si MM′ est une section principale, l'équation (1) donne $\delta = 0$; partant, les normales à la surface aux points M et M′ se rencontrent. De plus, des équations (2) et (3), jointes à $\sin\theta = 1$, il résulte $MN = MO = R$. Donc le point de rencontre de ces normales est le centre de courbure de la section principale.

Cela posé, les équations de la normale,

$$\frac{\xi - x}{\alpha} = \frac{\eta - y}{\beta} = \frac{\zeta - z}{\gamma} = R,$$

doivent subsister en même temps que leurs différentielles par rapport aux coordonnées de la surface, ce qui donne, en ayant égard à (5),

$$\frac{(\xi - x)\,d\alpha + \alpha\,dx}{\alpha^2} = \frac{(\eta - y)\,d\beta + \beta\,dy}{\beta^2} = \frac{(\zeta - x)\,d\gamma + \gamma\,dz}{\gamma^2}$$
$$= (\xi - x)\,d\alpha + (\eta - y)\,d\beta + (\zeta - z)\,d\gamma,$$

ou, en mettant, pour $\xi - x, \eta - y, \zeta - z$, leurs valeurs αR, βR, γR,

$$R = (\alpha\,d\alpha + \beta\,d\beta + \gamma\,d\gamma) = 0.$$

On a donc

$$(\xi - x)\,d\alpha + \alpha\,dx = 0,\quad (\eta - y)\,d\beta + \beta\,dy = 0,\quad (\zeta - z)\,d\gamma + \gamma\,dz = 0,$$

d'où l'on tire

$$(21)\qquad \frac{dx}{d\alpha} = \frac{dy}{d\beta} = \frac{dz}{d\gamma} = -\frac{\xi - x}{\alpha} = -\frac{\eta - y}{\beta} = -\frac{\zeta - z}{\gamma} = -R,$$

comme nous l'avions trouvé dans le numéro précédent.

682. Si l'on introduit les dérivées partielles de z par rapport à x et à y, on a, à cause de $dp = r\,dx + s\,dy$, $dq = s\,dx + t\,dy$,

$$d\alpha = d\frac{p}{k} = \frac{k^2\,dp - pk\,dk}{k^3} = \frac{(q^2+1)\,dp - pq\,dq}{k^3}$$
$$= \frac{[(q^2+1)r - pqs]\,dx + [(q^2+1)s - pqt]\,dy}{k^3},$$

d'où

$$k^3\alpha_1 = (q^2+1)r - pqs, \quad k^3\alpha_2 = (q^2+1)s - pqt,$$

et de même

$$k^3\beta_1 = (p^2+1)s - pqr, \quad k^3\beta_2 = (p^2+1)t - pqs.$$

Telles sont les valeurs à substituer dans l'équation (18) et dans l'équation (19), qui devient, en faisant $\frac{1}{R} = u$,

$$(22) \qquad u^2 - (\alpha_1 + \beta_2)u + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} = 0.$$

En développant l'expression $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix}$ [119], on trouve qu'elle se réduit à $\frac{1}{k^6}(p^2+q^2+1)(rt-s^2)$. Donc la condition (20) pour qu'une des deux courbures principales soit nulle est encore ici, dans le cas général, la même,

$$(23) \qquad rt - s^2 = 0,$$

que dans le cas particulier du n° 673.

683. Nous avons démontré, dans le paragraphe précédent, qu'il existe toujours deux sections principales, et par suite deux rayons de courbure principaux en chaque point d'une surface. Il s'ensuit de là que l'équation (22) aux rayons de courbure principaux doit toujours avoir ses racines réelles, d'où résultera aussi la réalité des racines de l'équation (18) aux sections principales.

On peut d'ailleurs le vérifier directement comme il suit. La condition de réalité des racines de chacune de ces équations est que la quantité

$$(\alpha_1+\beta_2)^2 - 4(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1) = (\alpha_1-\beta_2)^2 + 4\alpha_2\beta_1$$

soit positive. Or les valeurs de $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ donnent identiquement, par l'élimination de s, puis de $(q^2+1)r-(p^2+1)t$,

$$(p^2+1)\alpha_2 - pq(\alpha_1-\beta_2) - (q^2+1)\beta_1 = 0.$$

Donc

$$\begin{aligned}(p^2+1)&[(\alpha_1-\beta_2)^2+4\alpha_2\beta_1]\\ &= (p^2+1)(\alpha_1-\beta_2)^2 + 4pq(\alpha_1-\beta_2)\beta_1 + 4(q^2+1)\beta_1^2\\ &= [p(\alpha_1-\beta_2)+2q\beta_1]^2 + (\alpha_1-\beta_2)^2 + 4\beta_1^2,\end{aligned}$$

quantité essentiellement positive. Il en est donc aussi de même du facteur $(\alpha_1-\beta_2)^2+4\alpha_2\beta_1$, ce qui démontre la réalité des racines des équations (18) et (22).

684. Pour que l'expression que nous venons de décomposer en une somme de trois carrés soit nulle, il faut que chacun des carrés soit nul, et, par suite, que l'on ait $\beta_1=0$, $\alpha_1-\beta_2=0$, d'où, en vertu de l'identité précédente, $\alpha_2=0$. Donc les conditions pour que les deux rayons de courbure principaux soient égaux, ou pour que le point soit un *ombilic* [673], sont que l'on ait

(24) $$\alpha_2=0,\quad \alpha_1=\beta_2,\quad \beta_1=0,$$

ou, en mettant pour ces quantités leurs valeurs,

(25) $$\frac{p^2+1}{r}=\frac{pq}{s}=\frac{q^2+1}{t}.$$

Ces équations, jointes à celles de la surface, déterminent les trois coordonnées d'un ombilic.

On peut encore tirer ces équations des équations (17), en exprimant que la valeur de R est indépendante de m; ou encore de l'équation (18), en exprimant que, toute section étant une section principale, m doit être indéterminé, et par suite l'équation en m doit se réduire à une identité.

Pour déterminer, dans ce cas, la valeur de R, on a, le radical étant nul,

$$u=\frac{\alpha_1+\beta_2}{2}.$$

Si l'on désigne par μ la valeur commune des rapports (25), et que

l'on mette pour $\alpha_1 = \beta_2$ sa valeur, il vient

$$u = \frac{1}{R} = \frac{\mu}{k^3}(rt - s^2), \quad \text{d'où} \quad R = \frac{k^3}{\mu(rt - s^2)}.$$

685. *Exemple.* — Cherchons les ombilics de la surface du second degré

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = k.$$

Les cosinus α, β, γ des angles de la normale avec les axes sont donnés par les équations

$$\frac{\alpha}{ax} = \frac{\beta}{by} = \frac{\gamma}{cz} = \frac{1}{w},$$

en posant, pour abréger,

$$w = \sqrt{a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2}.$$

Formons l'équation (18) aux sections principales, puis écrivons qu'elle devient identique. Cette équation équivaut à $\frac{d\alpha}{dx} = \frac{d\beta}{dy}$, ou

$$(\text{A}) \qquad \frac{d\frac{ax}{w}}{dx} = \frac{d\frac{by}{w}}{dy}, \qquad \frac{aw^2dx - ax.wdw}{dx} = \frac{bw^2dy - by.wdw}{dy}.$$

Or, en éliminant z au moyen de l'équation de la surface, on a

$$w^2 = a(a-c)x^2 + b(b-c)y^2 + ck = \text{A}x^2 + \text{B}y^2 + ck,$$

d'où $wdw = \text{A}x\,dx + \text{B}y\,dy$. L'équation (A) devient donc

$$(a-b)w^2dx\,dy - (ax\,dy - by\,dx)wdw = 0,$$

ou, en substituant, réduisant, et faisant $m = \frac{dy}{dx}$,

$$\text{B}axy.m^2 + [\text{A}bx^2 - \text{B}ay^2 - (a-b)ck]\,m - \text{A}bxy = 0.$$

Cette équation devient identique, si l'on pose

$$xy = 0, \quad \text{A}bx^2 - \text{B}ay^2 - (a-b)ck = 0,$$

ce qui donne deux systèmes de solutions :

$$(\text{I}) \qquad x = 0, \quad by^2 = -k\frac{c(a-b)}{a(b-c)}, \quad cz^2 = k\frac{b(a-c)}{a(b-c)},$$

$$(\text{II}) \qquad y = 0, \quad cz^2 = -k\frac{a(b-c)}{b(a-c)}, \quad ax^2 = k\frac{c(a-b)}{b(a-c)}.$$

Pour avoir tous les ombilics possibles, il faut joindre à ces deux systèmes de solutions ceux que l'on obtiendrait en projetant sur un autre plan coordonné, sur celui des yz, par exemple. On retrouve de cette manière le système (II), avec le suivant :

$$\text{(III)} \qquad z = 0, \quad ax^2 = k\frac{b(a-c)}{c(a-b)}, \quad by^2 = -k\frac{a(b-c)}{c(a-b)}.$$

Supposons k positif, et $a > b > c$. Dans l'ellipsoïde, le système (II) sera le seul qui donne des valeurs réelles pour x, y, z. On aura alors quatre ombilics, compris dans le plan du grand et du petit axe. Dans l'hyperboloïde à une nappe, a et b étant positifs, c négatif, aucun des trois systèmes ne donnera de valeurs réelles. Dans l'hyperboloïde à deux nappes, $a > 0$, b et c étant < 0 ; ce sera encore le système (II) qui donnera quatre ombilics réels.

Pour avoir le rayon de courbure correspondant, l'équation (19), ayant ici ses racines égales, donne, à cause de $\alpha_1 = \beta_2$ (24) et de $y = 0$,

$$\frac{1}{R} = -\frac{\alpha_1 + \beta_2}{2} = -\beta_2 = -\frac{\partial \frac{by}{w}}{\partial y} = -\frac{b}{w}.$$

En effectuant les calculs, et substituant les valeurs précédentes, on trouve

$$R = -\sqrt{\frac{ack}{b^3}}.$$

686. Théorème. — *Une surface dont tous les points sont des ombilics est une sphère.*

En effet, on devra avoir, d'après les conditions (24), en chaque point de cette surface,

$$\text{(A)} \qquad \alpha_2 = \frac{\partial \alpha}{\partial y} = 0, \quad \beta_1 = \frac{\partial \beta}{\partial x} = 0.$$

On a d'ailleurs

$$\alpha\, dx + \beta\, dy + \gamma\, dz = 0,$$

d'où

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\alpha}{\gamma}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\beta}{\gamma},$$

et partant

$$\frac{\partial \frac{\alpha}{\gamma}}{\partial y} = -\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial \frac{\beta}{\gamma}}{\partial x},$$

c'est-à-dire, en ayant égard aux équations (A),

$$\text{(B)} \qquad \alpha \frac{\partial \gamma}{\partial y} = \beta \frac{\partial \gamma}{\partial x}.$$

La relation $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ donne d'ailleurs

$$\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \beta \frac{\partial \beta}{\partial x} + \gamma \frac{\partial \gamma}{\partial x} = 0, \quad \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \beta \frac{\partial \beta}{\partial y} + \gamma \frac{\partial \gamma}{\partial y} = 0.$$

Effaçant les termes qui s'annulent en vertu des équations (A), et ayant égard à l'équation (B), il vient

$$\text{(C)} \qquad \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial \beta}{\partial y}.$$

Or, d'après les équations (A), α ne peut être que fonction de x, et β ne peut être que fonction de y. Les dérivées de ces fonctions devant être égales entre elles, quels que soient x et y, ne peuvent être qu'égales à une même constante. En désignant celle-ci par $\frac{1}{h}$, et représentant par a, b d'autres constantes, on en tire, par l'intégration,

$$\alpha = \frac{x - a}{h}, \quad \beta = \frac{y - b}{h}, \quad \text{d'où} \quad \gamma = \frac{1}{h}\sqrt{h^2 - (x - a)^2 - (y - b)^2}.$$

On a donc

$$dz = -\frac{\alpha\, dx + \beta\, dy}{\gamma} = -\frac{(x - a)\, dx + (y - b)\, dy}{\sqrt{h^2 - (x - a)^2 - (y - b)^2}};$$

d'où, en intégrant et désignant par c une nouvelle constante,

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = h^2,$$

équation d'une sphère.

§ VI.

LIGNES DE COURBURE. — LIGNES ASYMPTOTIQUES. LIGNES GÉODÉSIQUES. THÉORÈME DE DUPIN SUR LES SURFACES ORTHOGONALES.

687. *Lignes de courbure.* — Si l'on détermine m ou $\frac{dy}{dx}$ par l'équation aux sections principales [681, (18)], on aura alors, au point considéré M, $\theta = \frac{\pi}{2}$, et la distance des normales aux deux points consécutifs M, M' de la section, $\delta = 0$. Si l'on passe du point M au point infiniment voisin M', pris sur la section principale du point M; puis du point M' au point infiniment voisin M'', pris sur la section principale du point M', et ainsi de suite, on obtiendra un polygone curviligne infinitésimal, qui aura pour limite le lieu des intersections successives ou l'*enveloppe* des sections principales. Cette courbe sera tangente en chacun de ses points à l'une des sections principales de ce point, de sorte que chaque tangente à cette courbe sera perpendiculaire à sa tangente conjuguée par rapport à sa surface, et que les normales à la surface menées en deux points de cette courbe infiniment voisins se rencontreront. Une telle courbe s'appelle une *ligne de courbure* de la surface.

Comme on peut, en chaque point de la surface, tracer deux sections principales, il s'ensuit de là que par chaque point de la surface passent deux lignes de courbure, qui se coupent à angles droits. L'équation différentielle des lignes de courbure est $\cos\theta = 0$ ou $\delta = 0$, c'est-à-dire [678, 679]

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ d\alpha & d\beta & d\gamma \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} = 0, \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ dX & dY & dZ \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} = 0,$$

ou encore [679]

$$\alpha_2 \frac{dy^2}{dx^2} + (\alpha_1 - \beta_2)\frac{dy}{dx} - \beta_1 = 0.$$

En intégrant cette équation, après en avoir éliminé z, on aura

l'équation générale des lignes de courbure, renfermant une constante arbitraire. Si l'on détermine convenablement cette constante, on aura le système des deux lignes de courbure qui passent par un point donné de la surface.

On pourra encore obtenir l'équation différentielle des lignes de courbure, en écrivant [681] que les normales à la surface en deux points consécutifs d'une ligne de courbure se rencontrent.

On voit que les lignes de courbure d'une surface forment deux systèmes de trajectoires orthogonales, partageant, comme les lignes de niveau et de plus grande pente, la surface en éléments rectangulaires infiniment petits.

688. *Exemple.* — Soit la surface du second degré

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = k.$$

On aura ici

$$X = ax, \quad Y = by, \quad Z = cz,$$

et l'équation aux lignes de courbure devient

$$\begin{vmatrix} ax & by & cz \\ a\,dx & b\,dy & c\,dz \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en développant,

$$a(b-c)x\,dy\,dz + b(c-a)y\,dz\,dx + c(a-b)z\,dx\,dy = 0,$$

ou, en posant,

$$A = \frac{1}{c} - \frac{1}{b}, \quad B = \frac{1}{a} - \frac{1}{c}, \quad C = \frac{1}{b} - \frac{1}{a},$$

A + B + C étant égal à zéro,

$$\frac{Ax}{dx} + \frac{By}{dy} + \frac{Cz}{dz} = 0.$$

De l'équation de la surface et de sa différentielle, on tire

$$\frac{z}{dz} = -\frac{k - ax^2 - by^2}{ax\,dx + by\,dy}.$$

Par la substitution de cette valeur, l'équation différentielle devient

$$\frac{Ax}{dx} + \frac{By}{dy} + \frac{C(ax^2 + by^2 - k)}{ax\,dx + by\,dy} = 0,$$

ou, en réduisant au moyen de la relation $A + B + C = 0$,

$$xy(Ba\,dx^2 + Ab\,dy^2) - (Bax^2 + Aby^2 + Ck)\,dx\,dy = 0,$$

que l'on peut écrire sous la forme

$$xy(\mathrm{a} + \mathrm{b}y'^2) - (\mathrm{a}x^2 + \mathrm{b}y^2 + h)y' = 0.$$

Nous verrons plus tard [847, II] comment cette équation s'intègre.

690. Le centre de courbure de la section principale au point M est le point d'intersection des normales à la surface $M\alpha$, $M'\alpha$, menées aux deux points consécutifs M, M' de la section principale, ou, ce qui revient au même, de la ligne de courbure MM'. Ces normales à la surface étant en même temps des normales à la ligne de courbure, on voit que la construction qu'il faut faire pour avoir le lieu des centres de courbure des sections principales pour tous les points d'une ligne de courbure est précisément celle qui donne une développée de la ligne de courbure [665]; donc le lieu des centres de courbure des sections principales des divers points d'une ligne de courbure est une développée de cette ligne de courbure. Ce lieu est donc tracé sur la surface polaire de la ligne de courbure.

Le lieu des normales à la surface, menées aux divers points de la ligne de courbure, est une surface développable, dont le lieu des intersections des génératrices ou l'*arête de rebroussement* est le lieu des centres de courbure des sections principales.

Pour avoir l'équation de cette surface développable, on éliminera x, y, z entre les équations de la normale

$$\frac{\xi - x}{\alpha} = \frac{\eta - y}{\beta} = \frac{\zeta - z}{\gamma},$$

l'équation de la surface et l'équation intégrale des lignes de courbure. En y joignant l'équation qui exprime que chacun des rapports ci-dessus est égal au rayon de courbure principal R, exprimé en x, y, z, on aura, par l'élimination de z entre les cinq équations, les deux équations du lieu des centres de courbure des sections principales.

Comme nous l'avons vu, le lieu des centres de courbure princi-

paux, étant une développée de la ligne de courbure, est en même temps une ligne géodésique [666] de la surface polaire de la ligne de courbure MM'....

Si l'on considère, outre le lieu *aa'*... des centres de courbure principaux, une autre développée *bb'*... de la ligne de courbure, on pourra tendre, d'un point M de cette ligne, deux fils sur la surface polaire, s'appliquant librement sur les courbes *aa'*... et *bb'*.... Si l'on déroule ces deux fils, en les tenant toujours tendus, le point d'intersection des deux fils parcourant la courbe MM'..., leur angle restera constant, et réciproquement, un fil M*bb'*..., enroulé sur la surface polaire, et faisant un angle constant avec le fil M*aa'*..., tandis qu'on les déroule tous les deux simultanément, leur point d'intersection décrivant la ligne de courbure MM'.., affectera nécessairement sur la surface polaire la forme d'une seconde développée de la courbe MM'... [666].

691. Cela posé, supposons que deux surfaces se coupent suivant une ligne qui soit pour chacune d'elles une ligne de courbure. Les lieux des centres de courbure principaux des deux surfaces, correspondants à cette ligne de courbure, seront deux développées de celle-ci. Donc les normales aux deux surfaces, en chaque point de l'intersection, feront entre elles un angle constant, et par suite ces deux surfaces se couperont sous un angle constant.

Réciproquement, si deux surfaces se coupent sous un angle constant, et que l'intersection soit une ligne de courbure de l'une d'elles, la normale à l'autre surface, faisant un angle constant avec la normale à la première, tracera sur la surface polaire de l'intersection une seconde développée de cette intersection. Donc les positions successives de cette normale se rencontreront, et par suite l'intersection sera aussi une ligne de courbure de la seconde surface.

692. Si une ligne de courbure est plane, sa surface polaire est un cylindre; ses développées sont des hélices de ce cylindre, c'est-à-dire des courbes coupant les génératrices du cylindre sous des angles constants. Donc le plan de la ligne de courbure, perpendiculaire à ces mêmes génératrices, fait un angle constant avec la tangente à une hélice, laquelle est une normale à la surface proposée, lorsque la développée considérée est le lieu des centres de

courbure principaux. Donc, lorsqu'une ligne de courbure est plane, son plan coupe la surface sous un angle constant. Cela résulte encore de ce que nous avons vu dans le numéro précédent, toute ligne tracée sur un plan pouvant être considérée comme une ligne de courbure de ce plan.

Réciproquement, si un plan coupe une surface sous un angle constant, le lieu des centres de courbure principaux correspondant à l'intersection sera une hélice de la surface polaire de cette intersection, et par suite une développée; donc les normales menées à la surface par les points de l'intersection se rencontreront, et l'intersection sera une ligne de courbure de la surface.

693. Si une ligne de courbure n'est pas plane, les génératrices de la surface polaire développée, n'étant pas parallèles entre elles, ne feront pas un angle constant avec la droite suivant laquelle se déroule la développée de la ligne de courbure, lieu des centres de courbure principaux. La variation de cet angle sera l'angle de deux axes de courbure consécutifs ou l'angle de torsion de la ligne de courbure. Donc l'angle du plan osculateur d'une ligne de courbure avec le plan tangent à la surface varie continuellement d'une quantité égale à l'angle de torsion de la ligne de courbure.

On tire de là cette autre réciproque du théorème du numéro précédent : que, si le plan osculateur d'une ligne de courbure coupe la surface sous un angle constant, la ligne de courbure est plane, puisque son angle de torsion doit être nul.

694. Toute ligne tracée sur une sphère étant une ligne de courbure de cette sphère, on voit que, si une surface est coupée par une sphère sous un angle constant, l'intersection est une ligne de courbure de cette surface.

Réciproquement, si une ligne de courbure est sphérique, la sphère qui la contient coupe la surface sous un angle constant.

695. Si une ligne de courbure est circulaire, c'est-à-dire à la fois plane et sphérique, on pourra faire passer par cette ligne une infinité de sphères, coupant toutes la surface sous des angles constants. On pourra choisir le centre de l'une de ces sphères de manière que cet angle constant soit nul, de sorte que la sphère touchera la surface tout le long de la ligne de courbure. Les normales

à la surface le long de la ligne de courbure passeront donc toutes par le centre de cette sphère, et formeront, par suite, un cône de révolution.

696. *Lignes asymptotiques.* — Considérons une surface dont l'indicatrice soit hyperbolique. En s'avançant sur la surface dans la direction de l'une ou l'autre des asymptotes de l'indicatrice, direction qui correspond [673] à une valeur nulle de la courbure, on tracera de proche en proche deux systèmes de courbes, appelées *lignes asymptotiques* ou *lignes de courbure nulle*, analogues aux lignes de courbure. Pour la direction d'une section asymptotique, on a

$$\frac{1}{\rho} = 0, \quad \theta = 0, \quad \text{d'où} \quad \sin\theta = 0,$$

ce qui donne [678, 679]

$$d\alpha\, dx + d\beta\, dy + d\gamma\, dz = 0, \quad \text{ou} \quad dX\, dx + dY\, dy + dZ\, dz = 0,$$

ou encore

$$dp\, dx + dq\, dy = 0, \quad r + 2s\frac{dy}{dx} + t\frac{dy^2}{dx^2} = 0.$$

On voit que, pour qu'il existe de telles lignes de courbure nulle, il faut que l'on ait

$$rt - s^2 \leqq 0.$$

Exemple. — Étant donnée la surface

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = k,$$

l'équation aux lignes asymptotiques sera

$$a\,dx^2 + b\,dy^2 + c\,dz^2 = 0,$$

ce qui montre d'abord que a, b, c ne doivent pas être de même signe. Remplaçant $c\,dz^2$ par sa valeur tirée de l'équation de la courbe, il vient

$$(1) \qquad a(k - by^2)\,dx^2 + 2abxy\,dx\,dy + b(k - ax^2)\,dy^2 = 0,$$

ou

$$(2) \qquad k\left(\frac{dx^2}{b} + \frac{dy^2}{a}\right) = (x\,dy - y\,dx)^2.$$

On peut toujours supposer k positif, et, puisque l'un au moins des coefficients a, b, c est négatif, soit c positif et a négatif. On voit que b devra être positif, et par suite la surface sera un hyperboloïde à une nappe.

En différentiant l'équation (1) ou

$$b(k - ax^2)y'^2 + 2abxy.y' + a(k - by^2) = 0,$$

il vient

$$[(k - ax^2)y' + axy]y'' = 0,$$

d'où l'on tire d'abord $y'' = 0$ et par suite $y' = \mathrm{C}$, ce qui est l'*intégrale générale* de l'équation. Celle-ci devient, par la substitution de cette valeur dans (2),

$$(y - \mathrm{C}x)^2 = k\left(\frac{1}{b} + \frac{\mathrm{C}^2}{a}\right),$$

équation d'un système de deux droites, qui sont les projections des génératrices rectilignes de la surface.

En égalant l'autre facteur à zéro, ce qui donne

$$(k - ax^2)y' + axy = 0,$$

et éliminant y' entre cette équation et l'équation (3), on obtient la *solution singulière*

$$ax^2 + by^2 = k,$$

qui, jointe à l'équation de la surface, donne $z = 0$. C'est donc la section principale faite par le plan des xy, et à laquelle les projections des génératrices rectilignes sont tangentes.

697. *Lignes géodésiques.* — On nomme *ligne géodésique* d'une surface, comme nous l'avons déjà dit [666], celle des lignes tracées sur la surface entre deux points donnés qui est la plus courte. Nous allons démontrer que cette ligne jouit de la propriété que son plan osculateur en chacun de ses points est normal en ce point à la surface.

Considérons, en effet, deux points infiniment voisins, pris sur une surface. Si, par la normale à la surface en un de ces points et par l'autre point, on fait passer une section normale à la surface, l'élément de cette section sera plus court que l'élément d'une section oblique tracée sur la surface entre les deux mêmes points.

Nous avons vu [344] que l'expression de la différence entre un arc infiniment petit et sa corde est, en appelant h la différence infiniment petite des abscisses des extrémités de cet arc,

$$h^3\sqrt{1+y'^2}\cdot\frac{1}{24}\left(\frac{y''}{1+y'^2}\right)^2=\frac{1}{24}(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{h^3}{\rho^2},$$

ρ étant le rayon de courbure au point initial. Or, pour les deux sections, la section normale et la section oblique, passant par les deux mêmes points infiniment voisins, le facteur $(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}$ est infiniment peu différent. De plus, ρ diffère infiniment peu du rayon de courbure de la section normale, laquelle fait un angle infiniment petit avec la proposée. Si donc on désigne par ε l'angle de la section oblique avec la section normale, le rayon de courbure de la section oblique sera, à un infiniment petit près, $\rho\cos\varepsilon$. Donc, en désignant par δ, δ' les différences entre les longueurs des arcs des deux sections et leur corde commune, on aura $\delta'=\dfrac{\delta}{\cos^2\varepsilon}$. Par conséquent, l'élément de la section normale est le plus court. Il résulte de là qu'une ligne tracée sur une surface ne peut être la plus courte entre deux de ses points, qu'autant que son plan osculateur est, en chaque point de contact, normal à la surface.

On en conclut [693] que, si une ligne géodésique est en même temps une ligne de courbure, elle est nécessairement plane.

698. En désignant par α, β, γ les cosinus des angles de la normale à la surface avec les axes, et par a, b, c les cosinus $\dfrac{dx}{ds}$, $\dfrac{dy}{ds}$, $\dfrac{dz}{ds}$ des angles de la tangente à la courbe avec les mêmes axes [628], la condition exprimant que la normale à la surface est contenue dans le plan osculateur à la courbe sera

$$\frac{\alpha}{da}=\frac{\beta}{db}=\frac{\gamma}{dc}=\frac{1}{d\tau}=\frac{\rho}{ds},$$

d'où

$$\alpha\,ds=\rho\,da,\quad \beta\,ds=\rho\,db,\quad \gamma\,ds=\rho\,dc.$$

Supposons maintenant que, par un point A de la surface, on

mène une infinité de lignes géodésiques; soit AB une quelconque d'entre elles considérée comme fixe, et soit φ l'angle que fait avec AB la ligne géodésique qui joint le point A à un point quelconque M de la surface. Si l'on fixe au point A l'extrémité d'un fil flexible et inextensible, et qu'en tendant ce fil sur la surface on le fasse tourner autour du point A, il coïncidera successivement avec toutes les lignes géodésiques qui partent du point A. Si l'on tend donc le fil entre A et M, la position du point M sur la surface sera déterminée par l'angle φ qui fixe la direction de la ligne géodésique AM, et par la longueur s de l'arc AM, en sorte que les coordonnées x, y, z du point M seront des fonctions déterminées des deux variables s et φ.

699. Si, à partir du point A, on porte sur toutes les lignes géodésiques une même longueur s, les extrémités M de cette longueur formeront une courbe, que nous appellerons un *cercle géodésique*. Soit σ la longueur d'un arc de cercle géodésique BM, compté à partir d'un point fixe B; cet arc sera une certaine fonction de φ et de s.

Désignons par λ, μ, ν les cosinus des angles que fait la tangente au cercle géodésique en M avec les axes. Pour un point M', pris sur ce cercle à une distance infiniment petite de M, on aura

$$dx = \lambda\, d\sigma, \quad dy = \mu\, d\sigma, \quad dz = \nu\, d\sigma.$$

Donc, en remarquant que ces valeurs de dx, dy, dz sont les différentielles partielles de x, y, z par rapport à φ, s restant constant sur le cercle géodésique, on aura

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = \lambda \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \mu \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial z}{\partial \varphi} = \nu \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi}.$$

Si l'on fait maintenant varier x, y, z sur la même ligne géodésique AM des différentielles partielles $d_s x$, $d_s y$, $d_s z$, les dérivées partielles $\frac{\partial x}{\partial s}$, $\frac{\partial y}{\partial s}$, $\frac{\partial z}{\partial s}$ représenteront les cosinus a, b, c des angles que fait la tangente à la ligne AM en M avec les axes. Par conséquent,

$$\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial z}{\partial \varphi} = (a\lambda + b\mu + c\nu)\frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} = \cos \mathrm{AMM'} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi}.$$

En appelant T le premier membre de cette équation, on a

$$\frac{\partial T}{\partial s} = \frac{\partial^2 x}{\partial s^2}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 y}{\partial s^2}\frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 z}{\partial s^2}\frac{\partial z}{\partial \varphi} + \frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial^2 x}{\partial s\,\partial \varphi} + \frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial^2 y}{\partial s\,\partial \varphi} + \frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial^2 z}{\partial s\,\partial \varphi}$$
$$= \frac{\partial^2 x}{\partial s^2}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 y}{\partial s^2}\frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 z}{\partial s^2}\frac{\partial z}{\partial \varphi} + \frac{1}{2}D_\varphi\left[\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2\right].$$

On a d'ailleurs, par le numéro précédent,

$$\frac{\partial^2 x}{\partial s^2} = \frac{\partial a}{\partial s} = \frac{\alpha}{\rho}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} = \frac{\partial b}{\partial s} = \frac{\beta}{\rho}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} = \frac{\partial c}{\partial s} = \frac{\gamma}{\rho},$$

d'où l'on tire

$$\frac{\partial^2 x}{\partial s^2}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 y}{ds^2}\frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 z}{\partial s^2}\frac{\partial z}{\partial \varphi} = \frac{1}{\rho}(\alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu)\frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} = \frac{\cos \mathrm{NMM}'}{\rho}\frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} = 0,$$

MN étant la normale à la surface en M. L'autre terme de $\frac{\partial T}{\partial s}$, qui est égal à $\frac{1}{2}D_\varphi(a^2 + b^2 + c^2)$, est aussi nul; donc

$$\frac{\partial T}{\partial s} = 0,$$

et par suite la fonction T conserve la même valeur pour tous les cercles géodésiques de rayons différents décrits du centre A, lorsqu'on se déplace sur un même rayon géodésique; cette fonction ne peut donc dépendre que de φ.

Or, si l'on fait tendre s vers zéro, σ tend aussi vers zéro, quel que soit φ. On a donc, pour $s = 0$, $\frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} = 0$, et par suite aussi $T = 0$. Donc, pour $s = 0$, on a, quel que soit φ,

$$\cos \mathrm{AMM}' \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} = 0.$$

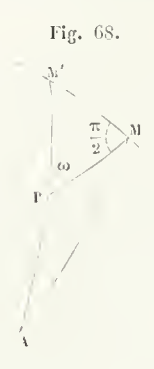
Cette quantité, étant indépendante de s, sera donc toujours nulle, quel que soit φ, pour toute autre valeur de s. Donc, $\frac{\partial \sigma}{\partial \varphi}$ ne pouvant être généralement nul pour s différent de zéro, il faut que l'on ait, quels que soient s et φ,

$$\cos \mathrm{AMM}' = 0, \quad \text{d'où} \quad \mathrm{AMM}' = \frac{\pi}{2}.$$

Donc un cercle géodésique est, en chacun de ses points, perpendiculaire à son rayon géodésique.

700. On peut démontrer géométriquement ce théorème. Soient deux lignes géodésiques infiniment voisines AM, AM′ (*fig.* 68),

Fig. 68.



sur lesquelles on a pris des longueurs égales AM = AM′. Je dis que les angles AMM′ et AM′M sont droits. Supposons, en effet, qu'ils diffèrent de $\frac{\pi}{2}$ de quantités finies. Les angles que fait MM′ avec les lignes géodésiques infiniment voisines AM, AM′ ne pouvant différer entre eux qu'infiniment peu, la somme des angles AMM′, AM′M diffère infiniment peu de π, et par suite, si l'un de ces angles est aigu, l'autre est nécessairement obtus. Soit $M' = \frac{\pi}{2} - \omega$, ω étant un angle fini. Menons un arc MP, perpendiculaire à MM′, d'où $M'MP = \frac{\pi}{2}$, M′MA étant $> \frac{\pi}{2}$. Le triangle infinitésimal M′MP ayant l'angle $MPM' = \pi - \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) = \omega$, on a

$$MP = M'P\cos\omega < M'P,$$

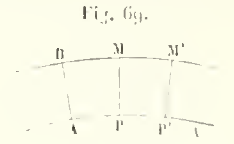
la différence étant infiniment petite du premier ordre. Donc, puisque AM = AM′,

$$AP + MP < AP + M'P, \quad \text{ou} \quad AP + PM < AM,$$

et par suite AM ne serait plus la ligne la plus courte entre A et M. Donc, si AM = AM′ sont des lignes géodésiques égales, l'angle M′MA ne peut différer d'un angle droit.

701. Ce théorème est un cas particulier d'un autre plus général, qui se démontre de la même manière, en changeant la signification d'une seule quantité. Soit une ligne quelconque AA' (*fig.* 69), tracée sur la surface. Menons en tous ses points des

Fig. 69.



lignes géodésiques PM, perpendiculaires à AA', et prenons sur ces lignes, à partir de AA', des longueurs constantes $PM = P'M' = \ldots$. Le lieu des extrémités M de ces longueurs coupera à angles droits toutes les lignes géodésiques PM. En effet, si l'on désigne par s la longueur PM, par ρ la distance AP, et par σ l'arc BM, on pourra répéter les mêmes calculs qu'au n° 699. Or, pour $s = 0$, l'angle BMP se confond avec le supplément de APM, et par suite il est droit; donc cet angle est droit aussi, quel que soit s.

Si l'on suppose que AA' soit un cercle géodésique infiniment petit, on retrouvera la proposition précédente.

702. Nous avons vu (682) que les normales menées à une surface S le long d'une ligne de courbure C ont pour lieu une surface développable D, dont l'arête de rebroussement est le lieu Γ des centres de courbure principaux.

En chaque point M de S se coupent deux pareilles surfaces développables D, D'. Leur intersection est la normale à S au point M, et elles se coupent orthogonalement, comme les deux lignes de courbure correspondantes C, C', qu'elles contiennent respectivement.

Le lieu des arêtes de rebroussement Γ est une surface composée de deux nappes Σ, Σ', correspondantes aux deux systèmes Γ, Γ' de développées des deux systèmes de lignes de courbure C, C'.

Pour avoir l'équation de ce lieu Σ, soit R un des rayons de courbure principaux, exprimé en fonction de x, y, z. On portera la longueur R sur la normale, et les coordonnées ξ, η, ζ du centre de courbure principal seront données par les équations

$$\frac{\xi - x}{\alpha} = \frac{\eta - y}{\beta} = \frac{\zeta - z}{\gamma} = \mathrm{R}.$$

Entre ces trois équations et l'équation de la surface, on éliminera x, y, z, ce qui donnera l'équation de celle des deux nappes Σ, Σ' qui correspond au rayon R. En remplaçant R par l'autre rayon R', on aura l'autre nappe.

Si S est une surface développable, l'une des deux nappes Σ, Σ' s'en va à l'infini.

703. Deux normales à la surface en deux points consécutifs de C sont tangentes aux développées Γ'_1, Γ'_2 des deux courbes C'_1, C'_2 de l'autre système qui passent par ces points, et de plus ces normales, se rencontrant, sont dans un même plan. Ce plan est donc tangent à la nappe Σ', sur laquelle sont situées Γ'_1 et Γ'_2. De même le plan normal, tangent à C', est tangent à la nappe Σ. Donc, suivant chaque normale à S, se coupent deux plans tangents, l'un à Σ, l'autre à Σ', et rectangulaires entre eux.

Si l'on place l'œil en un point de cette normale, on verra donc les contours apparents des deux nappes Σ, Σ' se couper à angles droits sur le prolongement de cette normale. Donc, de quelque point de l'espace que l'on regarde ces deux nappes, on verra leurs contours apparents se couper à angles droits.

La section principale tangente à C, étant tangente à Σ', est normale à Σ. Or elle contient deux tangentes consécutives à Γ, et par suite elle détermine le plan osculateur de cette courbe. De là résulte que Γ, ayant son plan osculateur normal à Σ, est une ligne géodésique de cette surface. Donc les développées, lieux des centres de courbure principaux pour les diverses lignes de courbure, sont des lignes géodésiques de la surface (Σ, Σ').

Supposons un fil tendu librement sur une des nappes Σ, Σ'; il prendra la forme d'une ligne géodésique, qui sera une ligne Γ, si son plan osculateur en un de ses points est tangent à une certaine ligne C. En déroulant ce fil, tenu toujours tendu, on tracera la ligne C. Si l'on tend ce fil successivement suivant toutes les lignes Γ, on décrira toutes les lignes C, et par suite la surface entière.

Si les nappes Σ, Σ' se touchent en un point, ce point correspondra à un ombilic de S. Si Σ et Σ' se touchent suivant une ligne, il y aura sur S une ligne d'ombilics ou *ligne de courbure sphérique*. Ce dernier cas aura lieu lorsque les équations $\alpha_2 = 0$, $\beta_1 = 0$

[685], qui déterminent les ombilics, se réduisent à une seule en vertu de l'équation de la surface.

704. Pour chaque ombilic ou pour chaque point d'une ligne de courbure sphérique, nous avons vu que l'équation

$$\alpha_2 m^2 + (\alpha_1 - \beta_2) m - \beta_1 = 0$$

se change en une identité. Pour voir ce que deviennent alors les directions des sections principales, cherchons ce que devient, à la limite, cette équation pour le point $(x+dx, y+dy, z+dz)$. On a, à cause de $\alpha_2 = \alpha_1 - \beta_2 = \beta_1 = 0$,

$$(a) \qquad d\alpha_2 . m^2 + (d\alpha_1 - d\beta_2) m - d\beta_1 = 0,$$

et comme, en divisant par dx, chacune des quantités $\frac{d\alpha_2}{dx}$, $\frac{d\alpha_1 - d\beta_2}{dx}$, $\frac{d\beta_1}{dx}$ prend la forme $Am + B$, il s'ensuit de là que l'on aura, pour déterminer m, une équation du troisième degré, qui aura trois racines réelles ou une seule. Donc par un ombilic il passera généralement trois sections principales ou une seule.

Lorsqu'il y a une ligne ombilicale, on a, pour chaque point de cette ligne, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_1 - \beta_2 = 0$, $\beta_1 = 0$. Donc, pour la valeur de $\frac{dy}{dx}$ qui correspond à la tangente à cette ligne, on a aussi $d\alpha_2 = 0$, $d\alpha_1 - d\beta_2 = 0$, $d\beta_1 = 0$, et par suite l'équation (a) est vérifiée en prenant pour m cette valeur de $\frac{dy}{dx}$. Donc une ligne ombilicale est, en chacun de ses points, tangente à une section principale.

Soit, par exemple, la surface du second degré, considérée au n° 686,

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = k.$$

L'équation aux sections principales

$$(Ba\,dy^2 - Ab\,dx^2)xy + [Abx^2 - Bay^2 - (a-b)ck]\,dx\,dy = 0$$

donne par différentiation, en remarquant que les termes en d^2x, d^2y disparaissent en vertu des conditions qui rendent l'équation identique,

$$(Ba\,dy^2 - Ab\,dx^2)\,d(xy) - 2(Abx\,dx - Bay\,dy)\,dx\,dy = 0,$$

ou, en faisant $y = 0$ [686, II],

$$xy'(Aby'^2 + Ba) = 0,$$

c'est-à-dire, en mettant pour A, B leurs valeurs,

$$abxy'[(a-c)y'^2 + (b-c)] = 0,$$

équation qui n'admet d'autre solution réelle que $y' = 0$. Donc la ligne de courbure unique se confond avec la section principale; ou plutôt l'une des lignes de courbure devient la partie de la section principale de la surface comprise entre les deux ombilics O, O′ situés au-dessus du plan des xy, ou entre les deux ombilics O_1, O'_1 situés au-dessous; tandis que l'autre ligne de courbure se confond avec la partie OO_1 ou $O'O'_1$. La première est la limite des lignes de courbure qui, dans l'ellipsoïde, se projettent suivant des ellipses; la seconde est la limite des lignes de l'autre système, à projections hyperboliques [708].

705. *Théorème de Dupin.* — Reprenons le calcul qui nous a donné [678] l'angle de déviation $d\psi$ de la normale. Les cosinus $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ se rapportent à la direction qui va du point M(x, y, z) au point M′$(x + dx, y + dy, z + dz)$. Le signe de la quantité

$$S = \pm\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

a été déterminé de manière que les cosinus

$$\alpha = \frac{X}{S}, \quad \beta = \frac{Y}{S}, \quad \gamma = \frac{Z}{S}$$

se rapportent à celle des deux directions de la normale qui s'étend d'un certain côté de la surface, choisi une fois pour toutes. Dès lors les différentielles $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$ auront des signes déterminés, et il en sera de même de l'expression

$$\cos\theta = \frac{1}{d\omega\, ds}\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ d\alpha & d\beta & d\gamma \\ dx & dy & dz \end{vmatrix}.$$

L'angle θ sera celui que fait la direction MM′ de la tangente à la

section normale considérée avec la direction de la tangente conjuguée MM″, cet angle étant compté positivement dans un sens déterminé, par exemple dans le sens correspondant à une rotation de la droite vers la gauche d'un observateur ayant la tête placée du côté de la surface vers lequel on prolonge la normale.

Si l'on fait maintenant tourner d'une manière continue le demi-diamètre MM′ de l'indicatrice, dans le sens direct, par exemple, en allant de l'axe des x vers l'axe des y, le demi-diamètre conjugué MM″ tournera également d'une manière continue, dans le même sens MM′ ou en sens contraire, selon que l'indicatrice sera elliptique ou hyperbolique. De plus, il est aisé de voir, dans les deux cas, que, lorsque MM′ parcourt successivement les quatre quadrants déterminés par les axes principaux, l'angle θ devient alternativement aigu et obtus, et change d'espèce en passant d'un quadrant à l'autre. Ainsi θ sera droit quand l'angle φ de MM′ avec l'une des sections principales aura pour valeurs $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$: il sera aigu (ou obtus) pour φ compris dans le premier ou dans le troisième quadrant, obtus (ou aigu) pour φ compris dans le deuxième ou le quatrième quadrant.

Lorsque $\cos\theta$ est positif, la normale M′N′ [676] se projette sur le plan tangent *en avant* de MM′; lorsque $\cos\theta$ est négatif, elle se projette *en arrière* de MM′ (¹). Donc le changement de signe de

$$d\psi = \frac{1}{ds}\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ d\alpha & d\beta & d\gamma \\ dx & dy & dz \end{vmatrix}$$

indiquera un changement de position relative de la normale M′N′ par rapport au plan de la section NMM′.

706. Si l'on rapporte la surface au plan tangent et au plan des deux sections principales, pris pour plans coordonnés, l'équation

(¹) En effet, MM″ est parallèle [675] à l'intersection BB′ (*fig.* 67, n° 676) des plans P, P′ tangents en M et en M′. Si l'on suppose d'abord le plan P′ appliqué sur le plan P, puis qu'on ramène P′ à sa première position, en le faisant tourner autour de BB′, la projection d'un point N′ de M′N′ se déplacera alors suivant M′B′, et, par conséquent, passera au dedans ou au dehors de l'angle M′AB′ ou M′MM″, suivant que cet angle sera aigu ou obtus.

de l'indicatrice sera [673], z étant constant,

$$rx^2 + ty^2 = 2z.$$

En faisant $\frac{y}{x} = \operatorname{tang}\varphi$, le coefficient angulaire du diamètre conjugué du diamètre MM' qui répond à l'angle φ sera

$$\operatorname{tang}\varphi' = \frac{dy}{dx} = -\frac{rx}{ty}, \quad \text{d'où} \quad \operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang}\varphi' = -\frac{r}{t},$$

$$\operatorname{tang}\theta = \operatorname{tang}(\varphi' - \varphi) = \frac{t \operatorname{tang}\varphi + r \cot\varphi}{r - t},$$

$$\cos\theta = \frac{\frac{1}{2}(r - t)\sin 2\varphi}{\sqrt{r^2\cos^2\varphi + t^2\sin^2\varphi}}.$$

On a d'ailleurs [679], à cause de $p = q = 0$ et de $s = 0$,

$$d\omega = \sqrt{dp^2 + dq^2} = \sqrt{r^2 dx^2 + t^2 dy^2} = ds\sqrt{r^2\cos^2\varphi + t^2\sin^2\varphi}.$$

Donc

$$d\psi = \cos\theta\, d\omega = \frac{r - t}{2} ds \sin 2\varphi.$$

Cette formule fait voir que non-seulement $d\psi$ change de signe, comme nous l'avons déjà vu, lorsqu'on fait croître φ de $\frac{\pi}{2}$, mais encore qu'il reprend la même valeur absolue, ds étant supposé le même dans les deux cas. Donc, si l'on mène, tout le long d'un cercle infiniment petit, de centre M, tracé sur la surface, toutes les normales à cette surface, les déviations des normales correspondantes à deux sections rectangulaires entre elles seront égales et de signes contraires.

707. Cela posé, considérons trois surfaces S_1, S_2, S_3, se coupant orthogonalement au point O. La normale à chacune d'elles sera tangente à l'intersection des deux autres. Soient OT_1, OT_2, OT_3 les trois tangentes à ces intersections. Prenons sur leurs directions trois longueurs infiniment petites égales entre elles,

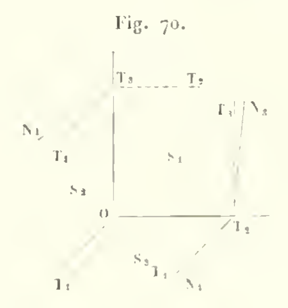
$$OT_1 = OT_2 = OT_3 = ds.$$

Au point T_2 de l'intersection de S_3 et de S_1, menons les normales T_2N_3, $T_2N'_1$ à ces deux surfaces, et soient $(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$, $(\alpha'_1, \beta'_1, \gamma'_1)$

(*fig.* 70) les cosinus des angles que ces normales font avec les axes OT_1, OT_2, OT_3. L'angle de T_2N_3 avec OT_1 est, au signe près, le complément de l'angle $d\psi_3$, que fait la normale T_2N_3 avec le plan de la section normale T_2OT_3 faite dans la surface S_3. On a donc $\pm d\psi_3 = \cos(N_3, T_1) = \alpha_3$. De même, la déviation de la normale N'_1 à la surface S_1 par rapport au plan de la section T_1OT_2 sera $\pm d\psi'_1 = \cos(N'_1, T_3) = \gamma'_1$.

Il s'ensuit de là que les deux cosinus α_3 et γ'_1 seront infiniment petits du premier ordre. Il en sera de même de $\beta_3 = \cos(N_3, T_2)$

Fig. 70.



et de $\beta'_1 = \cos(N'_1, T_2)$. Enfin, les angles (N_3, T_3), (N'_1, T_1) étant infiniment petits, on a, aux quantités près du second ordre,

$$\gamma_3 = \alpha'_1 = 1.$$

Si l'on suppose maintenant que les surfaces S_3 et S_1 se coupent orthogonalement tout le long de leur intersection OT_2, les normales T_2N_3 et $T_2N'_1$ satisferont rigoureusement à la condition de perpendicularité

$$\alpha_3\alpha'_1 + \beta_3\beta'_1 + \gamma_3\gamma'_1 = 0,$$

qui devient, d'après ce qui précède, en négligeant les infiniment petits du second ordre,

$$\alpha_3 + \gamma'_1 = 0.$$

En supposant que la même orthogonalité ait lieu le long des autres intersections OT_3, OT_1, on trouvera, en permutant circulairement les lettres et les indices, les deux autres relations

$$\beta_1 + \alpha'_2 = 0, \quad \gamma_2 + \beta'_3 = 0.$$

Or N'_1 et N_1 sont deux normales à S_1, correspondantes à deux sections rectangulaires entre elles. Donc les $d\psi$ correspondants sont égaux en valeur absolue. De plus, si N'_1 est en arrière, par exemple, du plan T_1OT_2, N_1 sera en avant du plan T_1OT_3; de sorte que les deux angles (N'_1, T_3), (N_1, T_2) seront tous les deux obtus ou tous les deux aigus. Donc les cosinus γ'_1, β_2 de ces angles sont égaux et de même signe. On a donc

$$\gamma'_1 = \beta_1, \quad \text{et de même} \quad \alpha'_2 = \gamma_2, \quad \beta'_3 = \alpha_3.$$

En éliminant γ'_1, α'_2, β'_3 entre ces équations et les précédentes, il vient

$$\alpha_3 + \beta_1 = 0, \quad \beta_1 + \gamma_2 = 0, \quad \gamma_2 + \alpha_3 = 0,$$

d'où l'on tire

$$\alpha_3 = \beta_1 = \gamma_2 = 0, \quad \text{et par suite} \quad \alpha'_2 = \beta'_3 = \gamma'_1 = 0.$$

Donc tous les $d\psi$ sont nuls; par conséquent, les trois sections OT_1, OT_2, OT_3 sont des sections principales sur les surfaces qu'elles rencontrent.

On en conclut immédiatement ce théorème :

Si trois familles de surfaces se coupent orthogonalement tout le long de leurs intersections mutuelles, ces intersections seront des lignes de courbure pour chacune des surfaces.

708. *Exemple.* — Soient les trois surfaces homofocales du second degré

$$(E) \qquad \frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - b^2} + \frac{z^2}{\lambda^2 - c^2} = 1,$$

$$(H_1) \qquad \frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - b^2} - \frac{z^2}{c^2 - \mu^2} = 1,$$

$$(H_2) \qquad \frac{x^2}{\nu^2} - \frac{y^2}{b^2 - \nu^2} - \frac{z^2}{c^2 - \nu^2} = 1,$$

où l'on suppose $\lambda^2 > c^2 > \mu^2 > b^2 > \nu^2$. Si l'on considère deux de ces surfaces, les deux premières par exemple, les cosinus des angles que font leurs plans tangents avec les plans coordonnés

sont respectivement proportionnels à

$$\frac{x}{\lambda^2}, \quad \frac{y}{\lambda^2 - b^2}, \quad \frac{z}{\lambda^2 - c^2},$$

et à

$$\frac{x}{\mu^2}, \quad \frac{y}{\mu^2 - b^2}, \quad -\frac{z}{c^2 - \mu^2}.$$

Or, si l'on retranche la première équation de la deuxième, il vient

$$(\lambda^2 - \mu^2)\left[\frac{x^2}{\lambda^2\mu^2} + \frac{y^2}{(\lambda^2 - b^2)(\mu^2 - b^2)} - \frac{z^2}{(\lambda^2 - c^2)(c^2 - \mu^2)}\right] = 0,$$

et, λ étant supposé différent de μ, la quantité entre parenthèses devra s'évanouir en chaque point de l'intersection de ces deux surfaces. Mais l'équation obtenue est précisément la condition de perpendicularité des deux plans tangents. Donc les deux surfaces sont orthogonales tout le long de leur intersection mutuelle. Il en est de même de chacune de ces deux surfaces, considérées avec la troisième.

Il en résulte, en vertu du théorème que nous venons de démontrer, que chacune de ces surfaces trace des lignes de courbure sur les deux autres, par rapport à celles-ci et par rapport à elle-même.

Ainsi, pour chaque système de valeurs de μ et de ν, les surfaces (H_1) et (H_2) tracent sur (E) deux lignes de courbure orthogonales entre elles. Si l'on fait varier μ, on aura toutes les lignes de courbure de l'un des systèmes; si l'on fait varier ν, on aura toutes celles de l'autre système.

Il s'ensuit de là que, si l'on donne une surface du second degré à centre, un ellipsoïde par exemple, représenté par l'équation

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} = 1,$$

où $A^2 > B^2 > C^2$, on identifiera son équation avec l'équation (E), en posant

$$\lambda^2 = A^2, \quad b^2 = A^2 - B^2, \quad c^2 = A^2 - C^2,$$

et alors les équations des deux systèmes de lignes de courbure de l'ellipsoïde s'obtiendront en combinant son équation avec l'une ou

l'autre des équations

$$\frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - A^2 + B^2} - \frac{z^2}{A^2 - C^2 - \mu^2} = 1,$$

$$\frac{x^2}{\nu^2} - \frac{y^2}{A^2 - B^2 - \nu^2} - \frac{z^2}{A^2 - C^2 - \nu^2} = 1,$$

μ^2 et ν^2 étant deux constantes arbitraires, telles que l'on ait

$$A^2 - C^2 > \mu^2 > A^2 - B^2 > \nu^2 > 0.$$

§ VII.

MESURE DE LA COURBURE DES SURFACES.

709. Nous avons pris pour mesure de la courbure d'une courbe plane le rapport $\frac{d\tau}{ds}$ [552] de l'angle de contingence à l'élément d'arc. On peut représenter la valeur de l'angle de contingence par la longueur de l'arc intercepté, sur un cercle de rayon $= 1$, par deux rayons de ce cercle, menés parallèlement aux normales aux deux extrémités de l'arc ds, dirigées de la concavité vers la convexité de la courbe. Si l'on établit donc, au moyen de ces normales, une correspondance entre chaque point de la courbe et les points du cercle de rayon $= 1$, on pourra définir la mesure de la courbure d'une courbe comme la limite du rapport des deux arcs infiniment petits correspondants, pris sur le cercle de rayon $= 1$ et sur la courbe.

Si le sens de la concavité de la courbe vient à changer, le sens du mouvement du point du cercle correspondant à un point mobile dans un sens constant sur la courbe changera en même temps, et nous avons vu qu'à ce changement de sens correspond un changement de signe de l'expression de la courbure.

710. Considérons maintenant une surface courbe S, et un élément superficiel dS entourant un point M de cette surface. Si par le centre d'une sphère Σ, de rayon $= 1$, on mène des rayons parallèles aux normales en tous les points de l'élément dS, chaque rayon déterminera sur la sphère un point correspondant à un point de la surface S, et ces points de la sphère rempliront un élément

$d\Sigma$ entourant le point μ correspondant à M. L'analogie conduira dès lors à choisir pour mesure de la courbure de la surface en M la limite du rapport

$$k = \frac{d\Sigma}{dS}.$$

On peut prendre pour dS un triangle infinitésimal, ayant pour sommets trois points de la surface infiniment voisins M, M′, M″; alors $d\Sigma$ sera le triangle déterminé par les trois points correspondants μ, μ', μ'' de la surface sphérique. En effet, on peut décomposer un élément d'aire quelconque en éléments triangulaires, et, comme la limite du rapport de deux éléments triangulaires correspondants de S et de Σ ne dépend que des coordonnées d'un des sommets M sur la surface S, cette limite sera évidemment la même pour le rapport des deux sommes de triangles.

711. Si la surface S est uniconcave au point M, c'est-à-dire si ses deux sections principales ont leurs concavités tournées dans le même sens, alors les rayons de la sphère, menés dans le même sens, à partir du centre, que les normales à S dirigées vers la convexité de cette surface, détermineront un triangle $\mu\mu'\mu''$, qui aura son plan parallèle à celui du triangle MM′M″, et qui, de plus, sera tel que les deux contours MM′M″ et $\mu\mu'\mu''$ seront parcourus dans le même sens.

Si, au contraire, la surface S est à indicatrice hyperbolique, on pourra prendre pour MM′ et MM″ deux directions correspondantes à des sections ayant leurs concavités de sens contraires. Alors, si les normales en M et en M′, qui déterminent le côté $\mu\mu'$ du triangle sphérique, sont situées d'un certain côté de la surface S, celles qui détermineront l'autre côté $\mu\mu''$ devront être l'une le prolongement de la précédente normale en M, et l'autre, la normale en M″ située du même côté de S que ce prolongement, et l'on voit dès lors que les deux triangles MM′M″ et $\mu\mu'\mu''$ auront leurs sommets disposés en sens inverse. On peut le voir plus clairement en supposant que MM′ et MM″ soient les sections principales de la surface, et considérant que les points de rencontre des normales en M′ et en M″ avec la normale en M sont situés de côtés différents de la surface.

Enfin, si la surface S est développable, en prenant toujours pour

MM′, MM″ deux sections principales, l'une de ces sections MM′ sera la génératrice rectiligne; les normales en M et en M′ seront parallèles, et par suite μ' se confondra avec μ; le triangle $\mu\mu'\mu''$ sera donc nul, et par conséquent la mesure de la courbure sera égale à zéro.

Si nous exprimons maintenant, sous forme de déterminants, les surfaces des deux triangles dS, $d\Sigma$ au moyen des coordonnées de leurs sommets projetés sur un même plan, les expressions donneront les deux surfaces avec le même signe ou avec des signes contraires, suivant que les deux triangles auront leurs sommets disposés dans le même sens ou en sens contraires. De là il résulte que le rapport k de ces expressions sera positif ou négatif, suivant que la surface S aura ses deux courbures principales de même sens ou de sens contraires. La surface sera dite d'après cela une surface de *courbure positive* ou de *courbure négative*. Une surface développable sera une surface de *courbure nulle*.

712. On peut facilement trouver, par la Géométrie, une expression de la mesure de la courbure. En prenant, comme tout à l'heure, le triangle MM′M″ dont deux côtés sont les sections principales, MM′ sera égal au rayon de courbure principal correspondant R, multiplié par l'angle de contingence, lequel est représenté par le côté $\mu\mu'$ du triangle sphérique $d\Sigma$; donc $MM' = R.\mu\mu'$, et de même $MM'' = R'.\mu\mu''$, R′ étant l'autre rayon de courbure principal. D'ailleurs il est aisé de voir que le triangle $\mu\mu'\mu''$ est rectangle aussi bien que MM′M″. Donc le rapport des surfaces de ces triangles est

$$k = \frac{\mu\mu'.\mu\mu''}{MM'.MM''} = \frac{1}{RR'}.$$

La mesure de la courbure de la surface est donc égale au produit des courbures de ses sections principales, du moins quant à sa valeur absolue.

Donc, si l'on désigne par α, β, γ les cosinus des angles de la normale à S avec les axes, ou, ce qui est la même chose, les coordonnées du point μ de la sphère Σ correspondant à M; si l'on pose, de plus, comme au n° 681,

$$(1) \qquad d\alpha = \alpha_1 dx + \alpha_2 dy, \quad d\beta = \beta_1 dx + \beta_2 dy,$$

on aura [681 et 683]

$$(2) \qquad k = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} = \frac{rt - s^2}{(p^2 + q^2 + 1)^2}.$$

713. Établissons maintenant ces résultats analytiquement, en même temps que leur indépendance de la forme de l'aire dS, et le signe de la valeur de k.

Soient

$(x + dx, y + dy, z + dz)$ les coordonnées du point M',
$(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z)$ celles du point M''.

L'angle du plan tangent en M avec le plan des xy ayant pour cosinus γ, la projection de l'aire du triangle sur ce plan sera γdS. On aura donc

$$2\gamma dS = \begin{vmatrix} dx & dy \\ \delta x & \delta y \end{vmatrix}.$$

Les coordonnées des points μ', μ'' étant $(\alpha + d\alpha, \ldots)$, $(\alpha + \delta\alpha, \ldots)$, on aura de même, pour le double de la projection du triangle $d\Sigma$ sur le plan des xy,

$$2\gamma d\Sigma = \begin{vmatrix} d\alpha & d\beta \\ \delta\alpha & \delta\beta \end{vmatrix}.$$

On a d'ailleurs, par les équations (1) du numéro précédent,

$$d\alpha = \alpha_1 dx + \alpha_2 dy, \quad d\beta = \beta_1 dx + \beta_2 dy,$$
$$\delta\alpha = \alpha_1 \delta x + \alpha_2 \delta y, \quad \delta\beta = \beta_1 \delta x + \beta_2 \delta y,$$

d'où l'on tire, par la règle de la multiplication des déterminants [149],

$$\begin{vmatrix} d\alpha & d\beta \\ \delta\alpha & \delta\beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} dx & dy \\ \delta x & \delta y \end{vmatrix}.$$

On en conclut l'expression (2), indépendamment de la forme du triangle MM'M''. On voit aisément que le même résultat subsiste encore pour une forme quelconque de l'aire infinitésimale dS.

On reconnaît, par les formules précédentes, que le signe de la mesure de la courbure k varie avec celui de $rt - s^2$ ou avec celui de RR', ce qui confirme ce que nous avons annoncé au n° 711.

714. Supposons actuellement que les trois coordonnées x, y, z soient exprimées au moyen de deux variables indépendantes quelconques u, v, qui pourraient, si l'on voulait, devenir égales à x et à y. Indiquons, pour abréger l'écriture, par des accents *supérieurs* les dérivées partielles prises par rapport à u, et par des accents *inférieurs* les dérivées partielles prises par rapport à v, de sorte que l'on ait

$$dx = x' du + x_, dv, \quad dy = y' du + y_, dv, \quad dz = z' du + z_, dv.$$

L'élément d'une courbe tracée sur la surface sera donné par l'équation

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ &= (x'^2 + y'^2 + z'^2) du^2 + 2(x'x_, + y'y_, + z'z_,) du\, dv + (x_,^2 + y_,^2 + z_,^2) dv^2. \end{aligned}$$

En posant

$$\begin{aligned} E &= x'^2 + y'^2 + z'^2, \\ F &= x'x_, + y'y_, + z'z_,, \\ G &= x_,^2 + y_,^2 + z_,^2, \end{aligned}$$

la valeur de ds^2 prendra la forme

$$ds^2 = E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2.$$

715. Considérons la surface S comme la limite d'un polyèdre articulé, dont les faces seraient formées par des triangles infiniment petits tracés sur la surface, et ayant pour côtés les divers éléments ds. Si l'on déforme le polyèdre, en faisant tourner les divers triangles autour de leurs côtés comme charnières, on obtiendra pour limite une nouvelle surface, dans laquelle x, y, z seront d'autres fonctions des variables indépendantes u, v, fonctions que l'on choisira de manière que les points correspondants des deux surfaces se rapportent aux mêmes valeurs de u et de v. Par exemple, si l'on prend, sur un cylindre, pour u et v les longueurs comptées sur une génératrice et sur un arc d'hélice, coupant cette génératrice sous un angle donné, ces deux longueurs ne varieront pas, lorsqu'on déformera le cylindre en l'étendant sur un plan.

Les triangles élémentaires ayant leurs côtés invariables, il faut

que la nouvelle expression de ds^2,

$$ds^2 = E' du^2 + 2 F' du dv + G' dv^2,$$

soit identique à l'ancienne, quels que soient du, dv. Il faut pour cela que l'on ait, pour toutes valeurs de u et de v,

$$E' = E, \quad F' = F, \quad G' = G.$$

Donc, si l'on vient à déformer une surface, et que les coordonnées rectangulaires x, y, z soient exprimées au moyen des variables u, v, dont les valeurs sont attachées aux divers points de la surface et restent les mêmes pour chaque point pendant la déformation, les trois fonctions E, F, G, qui entrent dans l'expression de l'élément linéaire de ds, ne changeront pas de valeurs par l'effet de la déformation.

Réciproquement, si, pour deux surfaces S, S', dont les coordonnées sont exprimées au moyen des deux variables indépendantes u, v, les fonctions E, F, G de u et de v, qui servent à exprimer l'élément linéaire, sont les mêmes pour tout système de valeurs de u et de v, les côtés des triangles infinitésimaux qui joignent les points correspondants des deux surfaces seront égaux; donc ces surfaces sont les limites de deux états d'un même réseau polyédrique; elles sont donc déformables l'une dans l'autre, ou, comme on dit ordinairement, elles sont *applicables* l'une sur l'autre.

716. Nous allons maintenant démontrer que la mesure de la courbure ne change pas non plus par la déformation de la surface, et pour cela il suffira de faire voir que cette quantité peut s'exprimer au moyen des seules fonctions E, F, G et de leurs dérivées par rapport aux variables u, v.

D'après ce que nous avons vu (643), les cosinus α, β, γ des angles de la normale avec les axes sont proportionnels aux quantités

$$X = \begin{vmatrix} y' & z' \\ y_{,} & z_{,} \end{vmatrix}, \quad Y = \begin{vmatrix} z' & x' \\ z_{,} & x_{,} \end{vmatrix}, \quad Z = \begin{vmatrix} x' & y' \\ x_{,} & y_{,} \end{vmatrix},$$

de sorte qu'en posant

$$V^2 = X^2 + Y^2 + Z^2,$$

on aura

$$\alpha = \frac{X}{V}, \quad \beta = \frac{Y}{V}, \quad \gamma = \frac{Z}{V},$$

et par conséquent

$$k = \begin{vmatrix} D_x \frac{X}{V} & D_x \frac{Y}{V} \\ D_y \frac{X}{V} & D_y \frac{Y}{V} \end{vmatrix},$$

les dérivées D_x, D_y étant prises en faisant varier tout ce qui dépend de x et de y.

Si l'on considère maintenant x, y comme fonctions de u, v, on aura, pour deux fonctions quelconques $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$,

$$D_u f = x' D_x f + y' D_y f, \quad D_v f = x_, D_x f + y_, D_y f,$$
$$D_u \varphi = x' D_x \varphi + y' D_y \varphi, \quad D_v \varphi = x_, D_x \varphi + y_, D_y \varphi,$$

d'où [313]

$$\begin{vmatrix} D_u f & D_v f \\ D_u \varphi & D_v \varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x' & y' \\ x_, & y_, \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} D_x f & D_y f \\ D_x \varphi & D_y \varphi \end{vmatrix}.$$

Donc, à cause de $\begin{vmatrix} x' & y' \\ x_, & y_, \end{vmatrix} = Z$,

$$k = \frac{1}{Z} \begin{vmatrix} D_u \frac{X}{V} & D_v \frac{X}{V} \\ D_u \frac{Y}{V} & D_v \frac{Y}{V} \end{vmatrix}.$$

Or on a, en faisant $dX = X' du + X_, dv$, etc.,

$$D_u \frac{X}{V} = \frac{X'}{V} - \frac{XV'}{V^2}, \quad D_v \frac{X}{V} = \frac{X_,}{V} - \frac{XV_,}{V^2}, \quad \text{etc.};$$

donc le déterminant précédent devient égal à

$$\frac{1}{V^2} \begin{vmatrix} X' & X_, \\ Y' & Y_, \end{vmatrix} - \frac{V'}{V^3} \begin{vmatrix} X & X_, \\ Y & Y_, \end{vmatrix} + \frac{V_,}{V^3} \begin{vmatrix} X & X' \\ Y & Y' \end{vmatrix} = \frac{1}{V^4} \begin{vmatrix} X & X' & X_, \\ Y & Y' & Y_, \\ V^2 & VV' & VV_, \end{vmatrix}$$

$$= \frac{X}{V^4} \begin{vmatrix} X & X' & X_, \\ Y & Y' & Y_, \\ X & X' & X_, \end{vmatrix} + \frac{Y}{V^4} \begin{vmatrix} X & X' & X_, \\ Y & Y' & Y_, \\ Y & Y' & Y_, \end{vmatrix} + \frac{Z}{V^4} \begin{vmatrix} X & X' & X_, \\ Y & Y' & Y_, \\ Z & Z' & Z_, \end{vmatrix},$$

et enfin on en conclut

$$k = \frac{1}{V^4}\begin{vmatrix} X & X' & X_{,} \\ Y & Y' & Y_{,} \\ Z & Z' & Z_{,} \end{vmatrix}.$$

717. Pour transformer cette expression, différentions les identités

$$X x' + Y y' + Z z' = 0, \quad X x_{,} + Y y_{,} + Z z_{,} = 0.$$

En posant, pour abréger,

$$D = X x'' + Y y'' + Z z'' = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x_{,} & y_{,} & z_{,} \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix},$$

$$D_1 = X x'_{,} + Y y'_{,} + Z z'_{,} = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x_{,} & y_{,} & z_{,} \\ x'_{,} & y'_{,} & z'_{,} \end{vmatrix},$$

$$D_2 = X x_{,,} + Y y_{,,} + Z z_{,,} = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x_{,} & y_{,} & z_{,} \\ x_{,,} & y_{,,} & z_{,,} \end{vmatrix},$$

on aura

$$X' x' + Y' y' + Z' z' = -D, \quad X_{,} x_{,} + Y_{,} y_{,} + Z_{,} z_{,} = -D_2,$$
$$X_{,} x' + Y_{,} y' + Z_{,} z' = X' x_{,} + Y' y_{,} + Z' z_{,} = -D_1.$$

D'après cela, le déterminant qui entre dans la valeur de k peut s'écrire sous la forme

$$X\begin{vmatrix} Y' & Z' \\ Y_{,} & Z_{,} \end{vmatrix} + Y\begin{vmatrix} Z' & X' \\ Z_{,} & X_{,} \end{vmatrix} + Z\begin{vmatrix} X' & Y' \\ X_{,} & Y_{,} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y' & z' \\ y_{,} & z_{,} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} Y' & Z' \\ Y_{,} & Z_{,} \end{vmatrix} + \ldots$$
$$= \begin{vmatrix} Y' y' + Z' z' & Y' y_{,} + Z' z_{,} \\ Y_{,} y' + Z_{,} z' & Y_{,} y_{,} + Z_{,} z_{,} \end{vmatrix} + \ldots = \begin{vmatrix} D + X' x' & D_1 + X' x_{,} \\ D_1 + X_{,} x' & D_2 + X_{,} x_{,} \end{vmatrix} + \ldots$$
$$= \left\{ \begin{vmatrix} D & D_1 \\ D_1 & D_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} D & X' x_{,} \\ D_1 & X_{,} x_{,} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} X' x' & D_1 \\ X_{,} x' & D_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} X' x' & X' x_{,} \\ X_{,} x' & X_{,} x_{,} \end{vmatrix} \right\} + \ldots$$
$$= 3\begin{vmatrix} D & D_1 \\ D_1 & D_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} D & X' x_{,} + Y' y_{,} + Z' z_{,} \\ D_1 & X_{,} x_{,} + Y_{,} y_{,} + Z_{,} z_{,} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} X' x' + Y' y' + Z' z' & D_1 \\ X_{,} x' + Y_{,} y' + Z_{,} z' & D_2 \end{vmatrix}$$
$$= 3\begin{vmatrix} D & D_1 \\ D_1 & D_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} D & -D_1 \\ D_1 & -D_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -D & D_1 \\ -D_1 & D_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} D & D_1 \\ D_1 & D_2 \end{vmatrix}.$$

Donc

$$k = \frac{DD_2 - D_1^2}{(X^2 + Y^2 + Z^2)^2}.$$

718. Introduisons maintenant les quantités E, F, G. On trouve d'abord immédiatement

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = EG - F^2.$$

Il vient ensuite, en écrivant, pour abréger, $\Sigma x'^2$ au lieu de $x'^2 + y'^2 + z'^2$, $\Sigma x' x_{\prime}$ au lieu de $x' x_{\prime} + y' y_{\prime} + z' z_{\prime}$, et de même pour les autres,

$$DD_2 = \begin{vmatrix} \Sigma x'^2 & \Sigma x' x_{\prime} & \Sigma x' x_{\prime\prime} \\ \Sigma x_{\prime} x' & \Sigma x_{\prime}^2 & \Sigma x_{\prime} x_{\prime\prime} \\ \Sigma x'' x' & \Sigma x'' x_{\prime} & \Sigma x'' x_{\prime\prime} \end{vmatrix}.$$

$$D_1^2 = \begin{vmatrix} \Sigma x'^2 & \Sigma x' x_{\prime} & \Sigma x' x'_{\prime} \\ \Sigma x_{\prime} x' & \Sigma x_{\prime}^2 & \Sigma x_{\prime} x'_{\prime} \\ \Sigma x'_{\prime} x' & \Sigma x'_{\prime} x_{\prime} & \Sigma x'^2_{\prime} \end{vmatrix}.$$

On a d'ailleurs

$$\frac{1}{2} E' = \Sigma x' x'', \qquad \frac{1}{2} G' = \Sigma x_{\prime} x'_{\prime},$$

$$\frac{1}{2} E_{\prime} = \Sigma x' x'_{\prime}, \qquad \frac{1}{2} G_{\prime} = \Sigma x_{\prime} x_{\prime\prime},$$

$$F' = \Sigma x' x'_{\prime} + \Sigma x'' x_{\prime}, \qquad F_{\prime} = \Sigma x_{\prime} x'_{\prime} + \Sigma x' x_{\prime\prime},$$

$$F' - \frac{1}{2} E_{\prime} = \Sigma x'' x_{\prime}, \qquad F_{\prime} - \frac{1}{2} G' = \Sigma x' x_{\prime\prime},$$

$$\frac{1}{2} E_{\prime\prime} = \Sigma x'^2_{\prime} + \Sigma x' x'_{\prime\prime}, \qquad \frac{1}{2} G'' = \Sigma x'^2_{\prime} + \Sigma x_{\prime} x''_{\prime},$$

$$F'_{\prime} = \Sigma x'^2_{\prime} + \Sigma x' x'_{\prime\prime} + \Sigma x_{\prime} x''_{\prime} + \Sigma x'' x_{\prime\prime},$$

$$F'_{\prime} - \frac{1}{2} E_{\prime\prime} = \Sigma x'' x_{\prime\prime} + \Sigma x_{\prime} x''_{\prime}. \qquad F'_{\prime} - \frac{1}{2} G'' = \Sigma x'' x_{\prime\prime} + \Sigma x' x'_{\prime\prime},$$

$$F'_{\prime} - \frac{1}{2} E_{\prime\prime} - \frac{1}{2} G'' = \Sigma x'' x_{\prime\prime} - \Sigma x'^2_{\prime}.$$

En désignant par H la quantité $\Sigma x'^2_{\prime} - \frac{1}{2} E_{\prime\prime} - \frac{1}{2} G''$, que nous

n'aurons pas besoin de déterminer, il viendra

$$\sum x' x_{\prime\prime} = F'_{\prime} + H, \quad \sum x_{\prime}'^2 = -\frac{1}{2} E_{\prime\prime} + \frac{1}{2} G' + H.$$

En substituant ces valeurs dans les expressions de DD_2 et de D_1^2, il vient

$$DD_2 = \begin{vmatrix} E & F & F_{\prime} - \frac{1}{2} G' \\ F & G & \frac{1}{2} G_{\prime} \\ \frac{1}{2} E' & F' - \frac{1}{2} E_{\prime} & F'_{\prime} - H \end{vmatrix},$$

$$D_1^2 = \begin{vmatrix} E & F & \frac{1}{2} E_{\prime} \\ F & G & \frac{1}{2} G' \\ \frac{1}{2} E_{\prime} & \frac{1}{2} G' & \frac{1}{2} E_{\prime\prime} + \frac{1}{2} G' - H \end{vmatrix}.$$

Dans les deux déterminants, le terme qui contient H entre multiplié par le même facteur $\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}$; donc H disparaît quand on prend la différence des deux déterminants, et l'on pourra, sans altérer le résultat, supprimer H, en remplaçant ces déterminants par les suivants :

$$\Delta = \begin{vmatrix} E & F & F_{\prime} - \frac{1}{2} G' \\ F & G & \frac{1}{2} G_{\prime} \\ \frac{1}{2} E' & F' - \frac{1}{2} E_{\prime} & F'_{\prime} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} E & F & \frac{1}{2} E_{\prime} \\ F & G & \frac{1}{2} G' \\ \frac{1}{2} E_{\prime} & \frac{1}{2} G' & \frac{1}{2} E_{\prime\prime} + \frac{1}{2} G' \end{vmatrix},$$

et l'on a, par conséquent,

$$k = \frac{\Delta - \Delta_1}{(EG - F^2)^2}.$$

Donc la mesure de la courbure ne dépend que des fonctions E, F, G, qui ne changent pas quand on déforme la surface par simple flexion, sans extension ni contraction des lignes tracées sur cette surface. Donc la mesure de la courbure n'est pas altérée par une telle déformation de la surface.

719. Nous allons maintenant donner une interprétation géométrique des quantités E, F, G, au moyen desquelles nous avons exprimé l'élément linéaire et la mesure de la courbure.

Supposons que l'une des variables u et v, v par exemple, reste constante, u variant seule. Si l'on élimine u entre les trois équations qui donnent x, y, z en u et v, il restera deux équations entre x, y, z et la constante v, qui représenteront une courbe, que nous désignerons par $v = \beta$, β étant la valeur constante attribuée à v. De même, $u = \text{const.} = \alpha$ sera l'équation d'une autre courbe, tracée aussi sur la surface.

En donnant à v différentes valeurs constantes $v = v, v_1, v_2, \ldots$, on a une série de courbes, que nous désignerons par (v), (v_1), (v_2), ... De même, en donnant à u les valeurs constantes u, u_1, u_2, ..., on aura une série d'autres courbes (u), (u_1), (u_2), ...

Fig. 71.

Pour une courbe (v), on a $dv = 0$, et par suite l'élément linéaire MM_1 (*fig.* 71) se réduit à

$$MM_1 = d_u s = \sqrt{E}.du.$$

Pareillement, pour une courbe (u), $du = 0$, et l'élément linéaire sur cette courbe se réduit à

$$MM_2 = d_v s = \sqrt{G}.dv.$$

Soit maintenant MM′ la diagonale du parallélogramme infinitésimal, compris entre deux lignes (u) infiniment voisines et deux lignes (v) infiniment voisines, et soit ω l'angle M_1MM_2 de ce parallélogramme. Nous aurons

$$MM'^2 = MM_1^2 + MM_2^2 + 2MM_1.MM_2.\cos\omega,$$

c'est-à-dire

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 = E\,du^2 + G\,dv^2 + 2\sqrt{EG}.du\,dv\cos\omega,$$

d'où l'on tire

$$\cos\omega = \frac{F}{\sqrt{EG}},$$

et, partant,

$$\sin\omega = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{EG}}.$$

Si l'on désigne par θ l'angle de ds avec la ligne (v), et que MI soit la projection de ds sur cette ligne (v), on aura

$$MI = ds\cos\theta = MM_1 + M_1I = d_u s + d_v s\cos\omega,$$

ou, en mettant pour $d_u s$, $d_v s$, $\cos\omega$ leurs valeurs,

$$ds\cos\theta = \frac{E\,du + F\,dv}{\sqrt{E}}.$$

De même,

$$M'I = ds\sin\theta = MM_2\sin\omega = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{E}}\,dv.$$

720. Si les deux lignes (u) et (v) se coupent à angles droits, l'angle $\omega = \frac{\pi}{2}$, d'où $\cos\omega = 0$, et par suite $F = 0$. Donc la quantité F est nulle, toutes les fois que les lignes $u =$ const. et les lignes $v =$ const. forment deux systèmes de trajectoires orthogonales.

Alors les formules précédentes se simplifient, et l'on a

$$ds = \sqrt{E\,du^2 + G\,dv^2},$$

$$d_u s = ds\cos\theta = du.\sqrt{E}, \quad d_v s = ds\sin\theta = dv.\sqrt{G}.$$

La mesure de la courbure est donnée par l'équation

$$E^2G^2.k = \begin{vmatrix} E & 0 & -\frac{1}{2}D_u G \\ 0 & G & \frac{1}{2}D_v G \\ \frac{1}{2}D_u E & -\frac{1}{2}D_v E & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} E & 0 & \frac{1}{2}D_v E \\ 0 & G & \frac{1}{2}D_u G \\ \frac{1}{2}D_v E & \frac{1}{2}D_u G & \frac{1}{2}D_u^2 G + \frac{1}{2}D_v^2 E \end{vmatrix},$$

c'est-à-dire

$$(2)\quad \begin{cases} 4E^2G^2.k = E\left[\left(\dfrac{\partial G}{\partial u}\right)^2 + \dfrac{\partial E}{\partial v}\dfrac{\partial G}{\partial v}\right] \\ \qquad + G\left[\left(\dfrac{\partial E}{\partial v}\right)^2 + \dfrac{\partial E}{\partial u}\dfrac{\partial G}{\partial u}\right] - 2EG\left(\dfrac{\partial^2 E}{\partial v^2} + \dfrac{\partial^2 G}{\partial u^2}\right). \end{cases}$$

La valeur générale de l'élément superficiel $MM_1M'M_2 = dS$ est

$$(4)\qquad dS = d_u s\, d_v s \sin\omega = du\, dv\sqrt{EG - F^2},$$

expression qui se réduit, dans le cas de l'orthogonalité, à

$$(5)\qquad dS = du\, dv\sqrt{EG}.$$

721. Les lignes de courbure d'une surface formant deux systèmes de lignes orthogonaux entre eux, on pourra prendre ces systèmes pour ceux des lignes $u =$ const., $v =$ const., et leur appliquer les formules simplifiées du numéro précédent.

Exemple. — Soit une surface du second degré, un ellipsoïde, représenté par l'équation

$$(1)\qquad \frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - b^2} + \frac{z^2}{\lambda^2 - c^2} = 1.$$

Nous avons vu [708] que les lignes de courbure de cette surface sont déterminées par ses intersections avec les deux hyperbo-

loïdes homofocaux

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{x^2}{u^2}+\frac{y^2}{u^2-b^2}-\frac{z^2}{c^2-u^2}=1,\\ &\frac{x^2}{v^2}-\frac{y^2}{b^2-v^2}-\frac{z^2}{c^2-v^2}=1,\end{aligned}\right.$$

de sorte qu'elles peuvent être représentées par les deux systèmes d'équations $u=$ const., $v=$ const.

Pour exprimer x, y, z au moyen des variables u, v, il faut résoudre les équations (1) et (2) par rapport à x^2, y^2, z^2. Or le déterminant

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\lambda^2} & \frac{1}{\lambda^2-b^2} & \frac{1}{\lambda^2-c^2}\\ \frac{1}{u^2} & \frac{1}{u^2-b^2} & \frac{1}{u^2-c^2}\\ \frac{1}{v^2} & \frac{1}{v^2-b^2} & \frac{1}{v^2-c^2} \end{vmatrix}=\Delta$$

devient, en retranchant la première ligne verticale de chacune des deux autres,

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{\lambda^2-b^2} & \frac{1}{\lambda^2-c^2}\\ 1 & \frac{1}{u^2-b^2} & \frac{1}{u^2-c^2}\\ 1 & \frac{1}{v^2-b^2} & \frac{1}{v^2-c^2} \end{vmatrix}\cdot\frac{b^2c^2}{\lambda^2u^2v^2}=\frac{b^2c^2}{\lambda^2u^2v^2}\,\Delta_1,$$

Δ_1 étant précisément le numérateur de la valeur de x^2. Donc

$$x^2=\frac{\lambda^2u^2v^2}{b^2c^2}.$$

On trouverait de même

$$y^2=\frac{(\lambda^2-b^2)(u^2-b^2)(b^2-v^2)}{b^2(c^2-b^2)},\qquad z^2=\frac{(\lambda^2-c^2)(c^2-u^2)(c^2-v^2)}{c^2(c^2-b^2)}.$$

Il est aisé de vérifier, au moyen de ces expressions, que l'intersection de deux quelconques de ces surfaces est une ligne de courbure de chacune d'elles. Considérons, par exemple, l'intersection de l'ellipsoïde avec l'hyperboloïde à une nappe $u=$ const. On aura,

v étant seul variable,

$$bc.dx = \lambda u\,dv,$$

$$b\sqrt{c^2-b^2}.dy = -\sqrt{\lambda^2-b^2}\sqrt{u^2-b^2}.\frac{v\,dv}{\sqrt{b^2-v^2}},$$

$$c\sqrt{c^2-b^2}.dz = -\sqrt{\lambda^2-c^2}\sqrt{c^2-u^2}.\frac{v\,dv}{\sqrt{c^2-v^2}}.$$

Or l'équation aux lignes de courbure de l'ellipsoïde est [689]

$$\frac{(b^2-c^2)x}{dx} + \frac{c^2 y}{dy} - \frac{b^2 z}{dz} = 0;$$

son premier membre devient, en y substituant les valeurs précédentes de x, y, z, dx, dy, dz,

$$\frac{1}{v\,dv}\left[(b^2-c^2)v^2 - c^2(b^2-v^2) - b^2(v^2-c^2)\right] = 0.$$

Donc $u =$ const. est une ligne de courbure de l'ellipsoïde $\lambda =$ const.; et de même pour les autres intersections.

Cherchons maintenant la mesure de la courbure de l'ellipsoïde en un point quelconque. L'équation aux rayons de courbure principaux [683, (23)] donne [712], pour l'expression générale de cette mesure,

$$\frac{1}{R_1 R_2} = \frac{rt-s^2}{(p^2+q^2+1)^2}.$$

Or on a, pour l'ellipsoïde (1),

$$\frac{x}{\lambda^2} + \frac{z}{\lambda^2-c^2}p = 0, \qquad \frac{y}{\lambda^2-b^2} + \frac{z}{\lambda^2-c^2}q = 0,$$

$$\frac{1}{\lambda^2} + \frac{p^2}{\lambda^2-c^2} + \frac{z}{\lambda^2-c^2}r = 0, \qquad \frac{pq+zs}{\lambda^2-c^2} = 0,$$

$$\frac{1}{\lambda^2-b^2} + \frac{q^2}{\lambda^2-c^2} + \frac{z}{\lambda^2-c^2}t = 0,$$

d'où

$$\frac{zr}{\lambda^2-c^2} = -\frac{1}{\lambda^2} - \frac{(\lambda^2-c^2)x^2}{\lambda^4 z^2},$$

$$\frac{zs}{\lambda^2-c^2} = -\frac{(\lambda^2-c^2)xy}{\lambda^2(\lambda^2-b^2)z^2},$$

$$\frac{zt}{\lambda^2-c^2} = -\frac{1}{\lambda^2-b^2} - \frac{(\lambda^2-c^2)y^2}{(\lambda^2-b^2)^2 z^2}.$$

On en tire, en réduisant au moyen de l'équation (1),

$$\frac{z^2(rt-s^2)}{(\lambda^2-c^2)^2} = \frac{\lambda^2-c^2}{\lambda^2(\lambda^2-b^2)z^2}.$$

D'ailleurs,

$$\frac{z^2}{(\lambda^2-c^2)^2}(p^2+q^2+1) = \frac{x^2}{\lambda^4}+\frac{y^2}{(\lambda^2-b^2)^2}+\frac{z^2}{(\lambda^2-c^2)^2} = \frac{1}{\delta^2},$$

δ étant la distance du centre au plan tangent en (x, y, z). Donc enfin

$$\frac{1}{R_1R_2} = k = \frac{\delta^4}{\lambda^2(\lambda^2-b^2)(\lambda^2-c^2)}.$$

On voit par cette formule que la mesure de la courbure est constante en même temps que la distance δ. Elle est donc constante le long d'une même *polodie* [1].

On a maintenant $\lambda\sqrt{\lambda^2-b^2}\sqrt{\lambda^2-c^2} = \delta^2\sqrt{R_1R_2}$, de sorte que le volume de l'ellipsoïde peut être exprimé par $\frac{4}{3}\pi\delta^2\sqrt{R_1R_2}$.

§ VIII.

APPLICATION DES THÉORIES PRÉCÉDENTES A L'HÉLICE ET AUX SURFACES QUI EN DÉRIVENT.

722. *Hélice.* — Soient a le rayon du cylindre sur lequel l'hélice est tracée, et $2\pi b$ le pas de l'hélice. Les équations de la courbe pourront se mettre sous la forme

$$x = a\cos\frac{z}{b}, \quad y = a\sin\frac{z}{b},$$

ou, plus symétriquement, sous la forme

$$(1) \qquad x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad z = bt.$$

On en tire d'abord

$$(2) \qquad x^2+y^2 = a^2,$$

[1] *Voir* les Mémoires de Poinsot *Sur la rotation des corps.*

puis

$$(3)\qquad dx = -y\,dt,\quad dy = x\,dt,\quad dz = b\,dt,$$

d'où l'on conclut

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y},$$

ce qui exprime que la projection de la tangente sur le plan des xy est perpendiculaire au rayon de la base du cylindre.

En faisant

$$(4)\qquad a^2 + b^2 = c^2,$$

on a (2)

$$ds^2 = (y^2 + x^2 + b^2)\,dt^2 = c^2\,dt^2 = \frac{c^2}{b^2}\,dz^2,$$

d'où

$$\frac{dz}{ds} = \pm\frac{b}{c}.$$

La tangente à l'hélice fait donc un angle constant avec le plan des xy.

723. On a, d'après cela, pour la longueur de l'arc de la courbe,

$$s - s_0 = \frac{c}{b}(z - z_0) = (z - z_0)\,\text{séc}\,\delta,$$

δ étant l'angle constant de la tangente avec l'axe des z.

Les cosinus des angles de la tangente avec les axes sont

$$(5)\qquad \frac{dx}{ds} = -\frac{y}{c},\quad \frac{dy}{ds} = \frac{x}{c},\quad \frac{dz}{ds} = \frac{b}{c}.$$

Les équations de la tangente étant

$$(6)\qquad \frac{\xi - x}{-y} = \frac{\eta - y}{x} = \frac{\zeta - z}{b},$$

on aura, pour l'équation du plan normal, en effaçant les termes qui se détruisent,

$$(7)\qquad -y\xi + x\eta + b(\zeta - z) = 0,$$

et, pour l'équation générale du plan tangent [629],

$$(8)\qquad \left[\xi - x + \frac{y}{b}(\zeta - z)\right] + \lambda\left[\eta - y - \frac{x}{b}(\zeta - z)\right] = 0.$$

En écrivant que ce même plan est également tangent au point de la courbe infiniment voisin $(x + dx,\ y + dy,\ z + dz)$, il vient [634]

$$-dx + \frac{dy}{b}(\zeta - z) - \frac{y}{b}\,dz + \lambda\left[-dy - \frac{dx}{b}(\zeta - z) - \frac{x}{b}\,dz\right] = 0,$$

ou, à cause de $dx = -\frac{y}{b}\,dz$, $dy = \frac{x}{b}\,dz$,

$$(x + \lambda y)(\zeta - z) = 0,$$

ou enfin, en supprimant la solution étrangère $\zeta - z = 0$,

$$x + \lambda y = 0.$$

Éliminant λ entre cette équation et l'équation (8), on a, pour l'équation du plan osculateur,

$$(9)\qquad -y\xi + x\eta - \frac{a^2}{b}(\zeta - z) = 0.$$

En combinant les équations (7) et (9) du plan normal et du plan osculateur, on a les équations de la normale principale

$$(10)\qquad \frac{\xi}{x} = \frac{\eta}{y}, \quad \zeta = z,$$

qui représentent le rayon du cylindre mené par le point (x, y, z).

Autrement, les formules du n° 657, combinées avec les valeurs (5), donnent

$$d\tau\cos\lambda = -\frac{x}{c}\,dt, \quad d\tau\cos\mu = -\frac{y}{c}\,dt, \quad d\tau\cos\nu = 0,$$

d'où

$$\cos\lambda = -\frac{x}{a}, \quad \cos\mu = -\frac{y}{a}, \quad \cos\nu = 0, \quad \nu = \frac{\pi}{2}, \quad d\tau = \frac{a}{c}\,dt,$$

ce qui conduit aux équations (10) de la normale principale. De

plus, on a

$$(11)\qquad \rho = \frac{ds}{d\tau} = \frac{c^2}{a}\cdot$$

Donc le rayon de courbure de l'hélice est constant.

Le centre de courbure est l'intersection de la normale principale (10) avec le plan normal au point infiniment voisin

$$(x + dx,\ y + dy,\ z + dz),$$

ou, si l'on veut, l'intersection du plan osculateur (9) avec deux plans normaux infiniment voisins, ou avec leur intersection, qui est l'axe de courbure. La différentielle de l'équation (7) est, en vertu de (3),

$$(12)\qquad - x\xi - y\eta - b^2 = 0.$$

En la combinant avec (7), on a les équations de l'axe de courbure

$$(13)\qquad \frac{\xi + \dfrac{b^2}{a^2}x}{-y} = \frac{\eta + \dfrac{b^2}{a^2}y}{x} = \frac{\zeta - z}{-\dfrac{a^2}{b}}.$$

Ces équations, jointes à l'équation (9), donnent les coordonnées du centre de courbure. Il revient au même de combiner les équations (10) et (12), ce qui donne

$$\frac{\xi}{x} = \frac{\eta}{y} = \frac{-b^2}{x^2+y^2} = -\frac{b^2}{a^2},\quad \zeta = z.$$

Les coordonnées du centre de courbure sont donc

$$(14)\qquad \xi = -\frac{b^2}{a}\cos t,\quad \eta = -\frac{b^2}{a}\sin t,\quad \zeta = bt,$$

et l'on voit par là que le lieu des centres de courbure est une hélice de même pas que la proposée, et que l'on obtient en prolongeant chaque normale principale au delà de l'axe, de la quantité $\dfrac{b^2}{a}\cdot$

La distance de deux centres de courbure consécutifs, ou l'élé-

ment d'arc de cette hélice (14) est donc

$$(15) \qquad d\sigma = \frac{bc}{a}\,dt.$$

Pour avoir l'équation de la surface polaire, lieu des axes de courbure (13), on n'aura qu'à éliminer t entre les équations de cet axe; ou bien, en désignant par u la valeur commune des trois rapports (13), on aura les coordonnées de cette surface, exprimées (643) au moyen des deux variables indépendantes t, u,

$$(16) \qquad \xi = -\frac{b^2}{a^2}(x + uy), \quad \eta = -\frac{b^2}{a^2}(y - ux), \quad \zeta = z + bu.$$

724. Les cosinus des angles du plan osculateur avec les plans coordonnés étant $-\frac{by}{ac}$, $\frac{bx}{ac}$, $-\frac{a}{c}$, on en tire, pour l'angle de torsion [660],

$$d\omega = \sqrt{\left(d\frac{by}{ac}\right)^2 + \left(d\frac{bx}{ac}\right)^2 + \left(d\frac{a}{c}\right)^2} = \frac{b}{c}\,dt,$$

d'où le rayon de torsion

$$r = \frac{ds}{d\omega} = \frac{c^2}{b};$$

ce rayon est donc constant, comme le rayon de courbure.

Le centre de la sphère osculatrice s'obtiendra en combinant les équations de trois plans normaux infiniment voisins, savoir les équations (7), (12) et

$$y\xi - x\eta = 0.$$

Ces trois équations donnent pour ξ, η, ζ les valeurs (14). Donc le centre de la sphère osculatrice coïncide, dans l'hélice, avec le centre de courbure.

Le lieu des centres de la sphère osculatrice est donc identique avec le lieu (14) des centres de courbure. Cela résulte immédiatement de l'équation (5) [663],

$$R = \sqrt{\rho^2 + \frac{d\rho^2}{d\omega^2}},$$

qui se réduit à $R = \rho$, toutes les fois que ρ est constant; alors la dis-

tance $\frac{d\rho}{d\sigma}$ du centre de courbure au centre de la sphère osculatrice est nulle.

La tangente au lieu des centres de la sphère osculatrice n'est autre chose que l'axe de courbure (13) de l'hélice proposée, comme il est aisé de le vérifier. Donc le lieu de ces tangentes, qui coïncide avec la surface polaire (16), est le lieu des tangentes à une hélice (14) : c'est donc un *hélicoïde développable*.

725. Nous aurons les équations générales des développées de l'hélice, en combinant les équations (16) de la surface polaire avec une des équations [667]

$$\frac{\xi - x}{d\xi} = \frac{\eta - y}{d\eta} = \frac{\zeta - z}{d\zeta},$$

qui expriment que la tangente à la développée rencontre la courbe proposée. En prenant la première de ces équations $\frac{\xi - x}{d\xi} = \frac{\eta - y}{d\eta}$, et faisant, pour abréger, $\frac{b^2}{a^2} = \beta$, il vient (16)

$$d\xi = \beta[(y + ux)\,dt + y\,du], \quad d\eta = -\beta[(x - uy)\,dt + x\,du],$$

d'où

$$\frac{-(1 + \beta)x + \beta uy}{(y + ux)\,dt + y\,du} = \frac{-(1 + \beta)y - \beta ux}{-(x - uy)\,dt - x\,du}$$
$$= \frac{-(1 + \beta)(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)\,u\,dt} = \frac{\beta(x^2 + y^2)\,u}{(x^2 + y^2)(dt + du)},$$

ou enfin

$$\frac{u\,dt}{1 + \beta} + \frac{dt + du}{\beta u} = 0.$$

On tire de là

$$dt = -\frac{du}{1 + \frac{b^2}{c^2}u^2}, \quad \text{d'où} \quad u = -\frac{c}{b}\operatorname{tang}\frac{b}{c}(t + C),$$

C étant une constante arbitraire. Cette équation, jointe aux équations (16), détermine les développées de l'hélice.

726. *Hélicoïde développable*. — Cette surface est le lieu des

14.

tangentes à l'hélice, représentée [722] par les équations

$$(1) \qquad X = a\cos t, \quad Y = a\sin t, \quad Z = bt.$$

Les équations de la tangente seront

$$(2) \qquad \frac{x - X}{-Y} = \frac{y - Y}{X} = \frac{z - Z}{b} = \frac{-Yx + Xy}{a^2} = u.$$

Tirant de là x, y, z en fonction des variables t et u, et conservant, pour abréger, X, Y, Z pour représenter les expressions (1), on aura les équations

$$(3) \qquad x = X - Yu, \quad y = Y + Xu, \quad z = Z + bu = b(t + u),$$

qui donneront les coordonnées de l'hélicoïde en fonction des deux variables indépendantes.

On tire des équations (3)

$$(4) \qquad dx = -y\,dt - Y\,du, \quad dy = x\,dt + X\,du, \quad dz = b\,dt + b\,du.$$

Soit maintenant $A(\xi - x) + B(\eta - y) + C(\zeta - z) = 0$ l'équation d'un plan mené par le point (x, y, z). Pour qu'il passe en un point de la surface $(x + dx, y + dy, z + dz)$ infiniment voisin de (x, y, z), il faut que l'on ait

$$A\,dx + B\,dy + C\,dz = 0,$$

c'est-à-dire (4)

$$(-Ay + Bx + Cb)\,dt + (-AY + BX + Cb)\,du = 0.$$

Pour que cela ait lieu tout autour du point (x, y, z), on devra avoir [643] les conditions

$$-Ay + Bx + Cb = 0, \quad -AY + BX + Cb = 0,$$

d'où l'on tire

$$A : B : C = \begin{vmatrix} x & b \\ X & b \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} b & -y \\ b & -Y \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} -y & x \\ -Y & X \end{vmatrix} = -bYu : bXu : -a^2u.$$

On aura donc, pour l'équation du plan tangent, en remarquant que l'on a (2) $b(Yx - Xy) = -a^2bu$, et $a^2(z - bu) = a^2Z$,

$$(5) \qquad -bY\xi + bX\eta - a^2(\zeta - Z) = 0,$$

ce qui n'est autre chose que l'équation du plan osculateur à l'hélice (1) [723, (9)].

Les équations de la normale sont, d'après cela,

(6) $$\frac{\xi - x}{-bY} = \frac{\eta - y}{bX} = \frac{\zeta - z}{-a^2}.$$

Le coefficient angulaire de la projection de la normale sur le plan des xy étant $-\frac{X}{Y}$, cette projection est perpendiculaire à celle du rayon du cylindre qui passe par le point de contact de la génératrice sur laquelle est situé le pied de la normale.

Les cosinus des angles de la normale avec les axes étant

(7) $$-\frac{bY}{ac}, \quad \frac{bX}{ac}, \quad -\frac{a^2}{ac},$$

on voit que la normale fait un angle constant avec l'axe des z, ainsi qu'avec le plan des xy.

L'équation (5) ne dépendant pas de u, on voit que le plan tangent reste le même tant que t reste constant, c'est-à-dire tout le long d'une même génératrice.

727. L'équation des lignes de niveau $z = C$ ou $dz = 0$ devient ici

(8) $$t + u = C, \quad \text{ou} \quad dt + du = 0.$$

En éliminant une des variables t ou u entre les équations (3) et (8), les équations obtenues représentent une développante du cercle de base, comme on aurait pu le voir *a priori* par des considérations géométriques.

Si α, β, o sont les cosinus des angles que fait la tangente à la ligne de niveau avec les axes, et x, y, z les coordonnées d'un point d'une ligne de plus grande pente, la condition de perpendicularité des tangentes aux deux lignes donne $\alpha\,dx + \beta\,dy = 0$, équation différentielle des lignes de plus grande pente. Ici, en faisant $du = -dt$, on voit que α et β sont proportionnels à $-(y - Y)\,dt$, $(x - X)\,dt$, c'est-à-dire à $-Xu\,dt$, $-Yu\,dt$. On a donc, pour l'équation différentielle des lignes de plus grande pente,

$$-Xu\,dx - Yu\,dy = 0,$$

ou, en mettant pour dx, dy leurs valeurs (4), et réduisant,

$$a^2 u\,dt = 0,$$

d'où l'on tire $dt = 0$, $t = \text{const}$. Donc les lignes de plus grande pente sont les génératrices rectilignes de l'hélicoïde.

La solution $u = 0$ serait une solution singulière, qui donnerait (1), $x = X$, $y = Y$, $z = Z$: cette solution correspondrait donc à l'hélice directrice, lieu des intersections successives des lignes de plus grande pente.

728. L'angle de deux normales infiniment voisines est, d'après les valeurs (7),

$$(9)\qquad d\omega = \frac{b}{ac}\sqrt{dX^2 + dY^2} = \frac{b}{c}\,dt.$$

Pour avoir l'intersection de deux plans tangents infiniment voisins, on joindra à l'équation (5) sa différentielle par rapport aux coordonnées de la surface, savoir

$$-bX\xi - bY\eta + a^2 b = 0,$$

et l'on tire de ces deux équations

$$\frac{\xi - X}{-Y} = \frac{\eta - Y}{X} = \frac{\zeta - Z}{b}.$$

Les cosinus relatifs à la direction de cette droite sont $-\frac{Y}{c}, \frac{X}{c}, \frac{b}{c}$.

Les cosinus relatifs à la direction de l'élément ds sont $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$, où l'on a

$$ds = \sqrt{a^2 u^2 dt^2 + c^2 (du + dt)^2}.$$

On a donc, pour l'angle θ des tangentes conjuguées, dont l'une est tangente à ds,

$$\cos\theta = \frac{-Y\,dx + X\,dy + b\,dz}{c\,ds} = \frac{(Yy + Xx + b^2)\,dt + (Y^2 + X^2 + b^2)\,du}{c\,ds},$$

c'est-à-dire

$$\cos\theta = \frac{c(dt + du)}{ds}, \quad \text{d'où} \quad \sin\theta = \frac{au\,dt}{ds}.$$

On en conclut

$$d\tau = d\omega \sin\theta = \frac{abu\,dt^2}{c\,ds}, \quad \frac{1}{\rho} = \frac{abu\,dt^2}{c\,ds^2}.$$

L'équation aux sections principales ou aux lignes de courbure est donnée par la condition $\cos\theta = 0$, d'où l'on tire $dt + du = 0$, équation qui coïncide avec celle que nous avons déjà trouvée pour les lignes de niveau. Donc les lignes de niveau forment l'un des systèmes de ligne de courbure. L'autre système, qui n'est pas donné par l'équation $\cos\theta = 0$, et qui, la surface étant développable, correspond à une valeur infinie du rayon de courbure, sera formé par les trajectoires orthogonales des lignes du premier système, c'est-à-dire par les lignes de plus grande pente, qui sont les génératrices rectilignes.

729. Autrement, si l'on veut appliquer les formules générales du n° 681, $\frac{dx}{da} = \frac{dy}{db} = \frac{dz}{dc} = -R$, il vient, d'après les valeurs (7),

$$-\frac{ac\,dx}{b\,dY} = \frac{ac\,dy}{b\,dX} = \frac{dz}{0} = -R,$$

d'où l'on tire

$$0 = dt[(Xx + Yy)\,dt + (X^2 + Y^2)\,du] = a^2\,dt(dt + du),$$

d'où l'on tire les deux solutions

$$dt = 0, \text{ équation d'une génératrice, d'où } R = \frac{dx}{0} = \infty,$$

$$dt + du = 0, \text{ ou } dz = 0, \text{ équation d'une ligne de niveau,}$$

d'où l'on conclut

$$R = -\frac{ac(y - Y)\,dt}{bX\,dt} = -\frac{acu}{b},$$

valeur du rayon minimum de courbure.

Les coordonnées du centre de courbure correspondant à ce rayon R seront, en vertu des valeurs (7),

$$\xi = x - \frac{bY}{ac}R = X, \quad \eta = y + \frac{bX}{ac}R = Y, \quad \zeta = z - \frac{a^3}{ac}R = Z + \frac{c^2}{b}u.$$

On en conclut $\xi^2 + \eta^2 = a^2$. Donc la surface lieu des centres de courbure principaux est le cylindre sur lequel est tracée l'hélice.

730. *Hélicoïde gauche.* — On appelle ainsi le lieu des normales principales de l'hélice

$$(1)\qquad X = a\cos t,\quad Y = a\sin t,\quad Z = bt.$$

Les équations de cette normale principale étant [723, (10)]

$$\frac{x}{X} = \frac{y}{Y} = \frac{z - Z}{0} = u,$$

on aura, pour les expressions des coordonnées de la surface au moyen des variables indépendantes t, u,

$$(2)\qquad x = Xu,\quad y = Yu,\quad z = Z.$$

On tire de là

$$(3)\qquad dx = -y\,dt + X\,du,\quad dy = x\,dt + Y\,du,\quad dz = b\,dt.$$

Si l'on représente par $A(\xi - x) + B(\eta - y) + C(\zeta - z) = 0$ l'équation du plan tangent, on trouvera, par un raisonnement semblable à celui du n° 726,

$$A : B : C = -bY : bX : -a^2u,$$

de sorte que, si l'on fait, pour abréger,

$$U = \sqrt{a^2u^2 + b^2},$$

les cosinus des angles de la normale avec les axes seront

$$(4)\qquad -\frac{bY}{aU},\quad \frac{bX}{aU},\quad -\frac{a^2u}{aU}.$$

731. Pour z = const. ou $dz = 0$, on a t = const., équation d'une génératrice. Donc les lignes de niveau de la surface sont les génératrices rectilignes.

On a, le long d'une génératrice, dont les équations sont les équations (2) pour t = const.,

$$dx = X\,du,\quad dy = Y\,du,\quad dz = 0.$$

On a donc, pour l'équation des trajectoires orthogonales des lignes de niveau, c'est-à-dire pour l'équation différentielle des

lignes de plus grande pente,

$$(X\,dx + Y\,dy)\,du = a^2du^2 = 0,$$

d'où $du = 0$, $u = \text{const.}$, ce qui répond à une hélice de même pas que l'hélice (1), et tracée sur un cylindre de rayon au.

732. On a, pour l'angle de deux normales infiniment voisines,

$$d\omega = \frac{1}{a}\sqrt{b^2\left(d\,\frac{Y}{U}\right)^2 + b^2\left(d\,\frac{X}{U}\right)^2 + a^4\left(d\,\frac{u}{U}\right)^2} = \frac{b}{U^2}\sqrt{U^2dt^2 + a^2du^2}.$$

On a d'ailleurs

(5) $$ds = \sqrt{U^2dt^2 + a^2du^2},$$

d'où résulte

(6) $$d\omega = \frac{b\,ds}{U^2}.$$

En combinant l'équation du plan tangent avec sa différentielle par rapport aux coordonnées de la surface, on a, pour les équations de l'intersection de deux plans tangents infiniment voisins,

$$-\;bY\xi + bX\eta - a^2u(\zeta - z) = 0,$$
$$-\;b\,dY.\xi + b\,dX.\eta - a^2du(\zeta - z) = -\,a^2u\,dz.$$

Les cosinus des angles de cette intersection avec les axes sont proportionnels aux quantités

$$-\,a^2b(X\,du + Yu\,dt),\quad -\,a^2b(Y\,du - Xu\,dt),\quad a^2b^2dt,$$

dont la somme des carrés est $a^4b^2(U^2dt^2 + a^2du^2) = a^4b^2ds^2$; donc ces cosinus eux-mêmes sont

$$-\frac{X\,du + Yu\,dt}{ds},\quad -\frac{Y\,du - Xu\,dt}{ds},\quad \frac{b\,dt}{ds}.$$

On a, par conséquent, pour l'angle θ de deux tangentes conjuguées,

$$\cos\theta = \frac{-(X\,du + Yu\,dt)\,dx - (Y\,du - Xu\,dt)\,dy + b\,dt\,dz}{ds^2}$$
$$= \frac{U^2dt^2 - a^2du^2}{ds^2},$$

d'où, à cause de la valeur de ds^2,

$$1 + \cos\theta = \frac{2U^2\,dt^2}{ds^2}, \qquad 1 - \cos\theta = \frac{2a^2\,du^2}{ds^2},$$

et par suite

$$\sin\theta = \frac{2aU\,dt\,du}{ds^2},$$

$$dz = d\omega\sin\theta = \frac{2ab\,dt\,du}{U\,ds}, \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{2ab\,dt\,du}{U\,ds^2}.$$

L'équation différentielle des lignes de courbure, $\cos\theta = 0$, donne

$$dt = \pm\frac{a\,du}{\sqrt{a^2u^2 - b^2}},$$

d'où l'on tire, pour les rayons de courbure principaux, les valeurs

$$\frac{1}{R} = \pm\frac{d\omega}{ds} = \pm\frac{b}{U^2}.$$

733. Autrement, en opérant comme au n° 729, il vient (4)

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{R} &= -\frac{1}{dx}\,d\frac{bY}{aU} = \frac{1}{dy}\,d\frac{bX}{aU} \\
&= -\frac{b}{a}\,\frac{U^2\,dY - Y.a^2u\,du}{U^3\,dx} = \frac{b}{a}\,\frac{U^2\,dX - X.a^2u\,du}{U^3\,dy} \\
&= \frac{b}{a}\,\frac{a^4u\,du}{U^3(Y\,dx - X\,dy)} = -\frac{b}{a}\,\frac{a^4u\,du}{U^3.a^2u\,dt} = -\frac{ab\,du}{U^3\,dt} \\
&= \frac{b}{a}\,\frac{U^2(X\,dY - Y\,dX)}{U^3(-X\,dx - Y\,dy)} = -\frac{b}{a}\,\frac{a^3\,dt}{U.a^2\,du} = \frac{b\,dt}{aU\,du} \\
&= -\frac{1}{dz}\,d\frac{au}{U} = -\frac{ab^2\,du}{U^3\,dz} = -\frac{ab\,du}{U^3\,dt}.
\end{aligned}$$

On tire de là

$$-\frac{ab\,du}{U^3\,dt} = -\frac{b\,dt}{aU\,du}, \qquad dt^2 = \frac{a^2\,du^2}{U^2}, \qquad \frac{1}{R} = \pm\frac{b}{U^2}.$$

En faisant $\sin\theta = 0$, on a l'équation des lignes asymptotiques

$$dt\,du = 0,$$

d'où l'on voit que les deux systèmes de lignes asymptotiques coïn-

cident avec ceux des lignes de niveau et des lignes de plus grande pente [731].

Le lieu des centres de courbure principaux, ou la surface Σ [702], est donné (4) par les équations

$$\xi = au\cos t \mp \mathrm{U}\sin t, \quad \eta = au\sin t \pm \mathrm{U}\cos t, \quad \zeta = bt \mp \frac{a}{b}\mathrm{U}u,$$

les doubles signes correspondant aux deux nappes de la surface.

734. Les équations (2) ou

$$x = au\cos t, \quad y = au\sin t, \quad z = bt$$

donnent

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -au\sin t, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = au\cos t, \quad \frac{\partial z}{\partial t} = b,$$
$$\frac{\partial x}{\partial u} = a\cos t, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = a\sin t, \quad \frac{\partial z}{\partial u} = 0,$$

d'où [720], en changeant u en t et v en u,

$$\mathrm{E} = a^2u^2 + b^2 = \mathrm{U}^2, \quad \mathrm{F} = 0, \quad \mathrm{G} = a^2,$$
$$\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2 = a^2\mathrm{U}^2,$$
$$\begin{vmatrix} \mathrm{U}^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & -a^2u & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \mathrm{U}^2 & 0 & a^2u \\ 0 & a^2 & 0 \\ a^2u & 0 & a^2 \end{vmatrix} = -a^4b^2.$$

Donc l'expression de la mesure de la courbure est

$$k = -\frac{b^2}{\mathrm{U}^4},$$

ce qui s'accorde avec la valeur de $\frac{1}{\mathrm{RR}'}$, qui résulte des numéros précédents.

§ IX.

CONTACT DES DIVERS ORDRES DES LIGNES ET DES SURFACES.

735. *Contact de deux lignes.* — Si l'on projette une droite sur trois plans non parallèles deux à deux, deux au moins des projections de la droite seront avec celle-ci dans un rapport fini

Si l'on coupe deux courbes MM′, MM″, issues d'un même point, par un plan quelconque, infiniment voisin du point commun M, et qui ne soit parallèle à aucune des deux tangentes à ces courbes en M, l'ordre infinitésimal de chacune de ces trois quantités : l'angle $M'MM''$, $\frac{M'M''}{MM'}$, $\frac{M'M''}{MM''}$, sera dit l'*ordre de contact* des deux courbes au point M. Si $M'M''$ est infiniment petit de l'ordre $n+1$, l'ordre de contact des deux courbes sera n.

Deux au moins des projections de $M'M''$ sur les trois plans coordonnés seront, dans ce cas, des infiniment petits d'ordre $n+1$. Donc, sur deux au moins des trois plans coordonnés, les projections des deux courbes auront des contacts d'ordre n. Si les contacts sont d'ordres différents pour les projections sur deux de ces plans, l'ordre le moins élevé sera celui du contact des deux lignes dans l'espace.

Les conditions du contact d'ordre n pour les projections des deux courbes sur les plans des xz et des yz sont [567] l'égalité, pour ces deux courbes, des valeurs respectives des quantités

$$x, \quad \frac{dx}{dz}, \quad \dots, \quad \frac{d^n x}{dz^n}, \quad y, \quad \frac{dy}{dz}, \quad \dots, \quad \frac{d^n y}{dz^n},$$

pour une même valeur de z, ce qui fait en tout $2n+2$ conditions.

Si les équations de l'une des courbes renferment des paramètres arbitraires et que l'on détermine ceux-ci de manière que les deux courbes aient un contact de l'ordre le plus élevé possible, la première courbe sera dite *osculatrice* à la seconde. L'ordre du contact, selon que le nombre m des paramètres sera pair ou impair, aura pour valeur $\frac{m}{2}-1$ ou $\frac{m-1}{2}-1$. Dans ce dernier cas, il restera un paramètre arbitraire, que l'on pourra déterminer par une condition choisie à volonté.

736. *Exemples.* — I. *Droite osculatrice.* — Les équations générales d'une droite, étant de la forme

$$X = AZ + a, \quad Y = BZ + b,$$

renferment 4 paramètres arbitraires ; on pourra donc établir, entre la droite et une courbe donnée, un contact d'ordre $\frac{4}{2}-1=1$. On

aura, pour cela, à satisfaire aux quatre conditions

$$x = Az + a, \quad y = Bz + b,$$
$$\frac{dx}{dz} = A, \quad \frac{dy}{dz} = B.$$

En mettant pour les 4 coefficients A, a, B, b les valeurs ainsi obtenues, on retrouve les équations de la tangente à la courbe [625].

II. *Cercle osculateur.* — Les équations d'un cercle peuvent se mettre sous la forme

$$A(X-\alpha)+B(Y-\beta)+C(Z-\gamma)=0, \quad (X-\alpha)^2+(Y-\beta)^2+(Z-\gamma)^2=\rho^2,$$

et contiennent 6 paramètres, $\frac{B}{A}$, $\frac{C}{A}$, α, β, γ, ρ. On pourra donc établir, entre le cercle et la courbe, un contact du second ordre. Pour déterminer les paramètres, on remplacera, dans chaque équation et dans ses deux premières différentielles, X, Y, Z par les coordonnées de la courbe donnée; on en tirera, pour la première équation,

$$A\,dx + B\,dy + C\,dz = 0, \quad A\,d^2x + B\,d^2y + C\,d^2z = 0,$$

d'où

$$A : B : C = \begin{vmatrix} dy & dz \\ d^2y & d^2z \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} dz & dx \\ d^2z & d^2x \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} dx & dy \\ d^2x & d^2y \end{vmatrix},$$

ce qui donne, pour les coefficients de direction A, B, C, les valeurs que nous avons trouvées [633] pour ceux du plan osculateur, dans lequel doit être contenu le cercle cherché.

En différentiant la seconde équation une première fois, il vient

$$(x-\alpha)\,dx + (y-\beta)\,dy + (z-\gamma)\,dz = 0,$$

et cette équation, combinée avec celle du plan

$$A(x-\alpha) + B(y-\beta) + C(z-\gamma) = 0,$$

donne [635]

$$\frac{x-\alpha}{d\frac{dx}{ds}} = \frac{y-\beta}{d\frac{dy}{ds}} = \frac{z-\gamma}{d\frac{dz}{ds}},$$

ce qui montre que le point (α, β, γ) doit être situé sur la nor-

male principale. Une seconde différentiation donne

$$(x-\alpha)\,d^2x + (y-\beta)\,d^2y + (z-\gamma)\,d^2z = ds^2.$$

En ayant égard à cette équation, il vient

$$\frac{x-\alpha}{d\dfrac{dx}{ds}} = \frac{y-\beta}{d\dfrac{dz}{ds}} = \frac{z-\gamma}{d\dfrac{dz}{ds}} = \frac{\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2}}{\sqrt{\left(d\dfrac{dx}{ds}\right)^2+\left(d\dfrac{dy}{ds}\right)^2+\left(d\dfrac{dz}{ds}\right)^2}} = \frac{\rho}{d\tau}$$

$$= \frac{(x-\alpha)\,d^2x+(y-\beta)\,d^2y+(z-\gamma)\,d^2z}{d^2x\,d\dfrac{dx}{ds}+d^2y\,d\dfrac{dz}{ds}+d^2z\,d\dfrac{dz}{ds}}$$

$$= \frac{ds^2}{\dfrac{1}{ds}(d^2x^2+d^2y^2+d^2z^2-d^2s^2)} = \frac{ds}{d\tau^2},$$

d'où enfin $\rho = \dfrac{ds}{d\tau}$.

III. *Hélice osculatrice.* — La position de l'axe du cylindre sur lequel est tracée l'hélice dépend de quatre conditions. Une fois l'axe placé, les équations de l'hélice, rapportées à cet axe, pris pour axe des z, sont de la forme

$$X = a\cos\frac{Z-h}{b},\quad Y = a\sin\frac{Z-h}{b},$$

et par suite renferment encore trois paramètres. Donc la détermination complète de l'hélice dans l'espace dépend de 7 paramètres. On peut donc établir, entre l'hélice et la courbe donnée, un contact d'ordre $\frac{7-1}{2} - 1 = 2$, et il reste encore une condition arbitraire, que l'on peut remplir, par exemple, en faisant en sorte que l'hélice ait la même seconde courbure que la courbure proposée. Or, en appelant ρ et r les rayons de première et de seconde courbure de la courbe proposée, et les égalant à ceux de l'hélice [723 et 724], il vient

$$a\rho = br = a^2 + b^2,$$

équations d'où l'on tire

$$a = \frac{r}{\dfrac{r}{\rho}+\dfrac{\rho}{r}},\quad b = \frac{\rho}{\dfrac{r}{\rho}+\dfrac{\rho}{r}}.$$

Ces valeurs déterminent entièrement la forme de l'hélice. Il ne reste plus alors qu'à fixer, au moyen des cinq conditions restantes, la position de l'hélice dans l'espace.

On pouvait prévoir *a priori* que l'hélice ne peut avoir, en général, avec une courbe donnée, qu'un contact complet du *second* ordre; car, pour l'hélice, dont le rayon de première courbure est constant, le centre de la sphère osculatrice coïncide [663 et 724] avec le centre de courbure, ce qui n'a pas lieu pour une courbe quelconque. Donc les différentielles du troisième ordre, d'où dépend [661] la position du centre de la sphère osculatrice, ainsi que l'angle de torsion, ne peuvent être toutes les mêmes pour l'hélice et pour la courbe donnée, comme il le faudrait pour un contact complet du troisième ordre.

737. *Contact d'une ligne et d'une surface.* — On considère le contact de la ligne avec sa projection sur la surface, faite par des parallèles à l'axe des z, menées des divers points de la ligne jusqu'à la rencontre avec la surface, l'axe des z étant supposé non parallèle au plan tangent.

La distance des points de la courbe et de sa projection, qui répondent aux mêmes valeurs de x et de y, est

$$Z_1 - z_1 = Z - z + \frac{1}{1}(dZ - dz) + \frac{1}{1.2}(d^2Z - d^2z) + \ldots,$$

les dZ, d^2Z, ... relatifs à la courbe étant donnés en fonction de la variable indépendante t et de sa différentielle par les équations de la courbe, ainsi que les valeurs de x, y, dx, dy, d^2x, d^2y, ..., communes à la courbe et à sa projection sur la surface. On a ensuite, pour les dz, d^2z, ... relatifs à la projection,

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$
$$d^2z = p\,d^2x + q\,d^2y + r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2, \text{ etc.}$$

On aura maintenant :

1° Pour qu'il y ait un point commun, la condition $Z = z$;
2° Pour qu'il y ait contact du premier ordre, $dZ = dz$;
3° Pour qu'il y ait contact du second ordre, $d^2Z = d^2z$;

et ainsi de suite. On en tirera les conditions d'osculation d'une courbe et d'une surface.

738. *Exemples.* — I. *Plan osculateur à une courbe.* — Représentons par $Ax + By + Cz + D = 0$ l'équation de ce plan. Sa détermination dépend de trois conditions arbitraires, qui permettront d'établir entre ce plan et la courbe un contact du second ordre. On aura, en différentiant l'équation du plan deux fois, et remplaçant partout les coordonnées x, y, z du plan par les coordonnées X, Y, Z de la courbe, les équations

$$\begin{aligned} AX + BY + CZ + D &= 0,\\ A\,dX + B\,dY + C\,dZ &= 0,\\ A\,d^2X + B\,d^2Y + C\,d^2Z &= 0, \end{aligned}$$

qui sont celles qui nous ont déjà servi à déterminer le plan osculateur [633].

II. *Sphère osculatrice à une courbe.* — En remplaçant, dans l'équation de la sphère $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ et dans ses trois premières différentielles, x, y, z par les coordonnées de la courbe, il vient

$$\begin{aligned} &(X-a)^2 + (Y-b)^2 + (Z-c)^2 = R^2,\\ &(X-a)\,dX + (Y-b)\,dY + (Z-c)\,dZ = 0,\\ &(X-a)\,d^2X + (Y-b)\,d^2Y + (Z-c)\,d^2Z = -dS^2,\\ &(X-a)\,d^3X + (Y-b)\,d^3Y + (Z-c)\,d^3Z = -3\,dS\,d^2S, \end{aligned}$$

et l'on retrouve ainsi les équations déjà obtenus au n° 743, pour déterminer les 4 paramètres a, b, c, R, que renferme l'équation de la sphère.

III. *Cercle osculateur à une surface.* — Les équations d'un cercle dans l'espace renferment 6 paramètres [736, II]. En différentiant les deux équations du cercle chacune n fois, et remplaçant partout les coordonnées du cercle par celles de la surface, on obtiendra $2n + 2$ conditions. Les indéterminées de la question seront, outre les 6 paramètres, les n dérivées

$$\frac{dy}{dx}, \quad \frac{d^2y}{dx^2}, \quad \ldots, \quad \frac{d^ny}{dx^n},$$

ce qui fait un total de $6 + n$ indéterminées. Pour que le nombre des conditions soit égal à celui des inconnues, il faut que l'on ait

$2n+2=6+n$, d'où $n=4$. On pourra donc trouver, en chaque point de la surface, une section ayant avec un cercle un contact du quatrième ordre.

739. *Contact de deux surfaces.* — En désignant par Z et z les ordonnées de deux surfaces, on aura, comme précédemment, pour la distance des points de ces surfaces qui répondent à $x+dx$, $y+dy$,

$$Z_1 - z_1 = Z - z + \frac{1}{1}(dZ - dz) + \frac{1}{1.2}(d^2Z - d^2z) + \cdots$$

Ces deux surfaces auront un point commun, si l'on pose la condition $Z=z$. Elles auront un contact du premier ordre si l'on a $dZ=dz$, c'est-à-dire

$$(P-p)dx + (Q-q)dy = 0.$$

Pour que ce contact du premier ordre soit complet, il faut qu'il ait lieu dans toutes les directions à partir du point commun, c'est-à-dire, quel que soit le rapport $\frac{dy}{dx}$, ce qui exige que l'on ait les deux conditions

$$P=p, \quad Q=q.$$

Pour que le contact soit du deuxième ordre dans toutes les directions, il faut que l'on ait $d^2Z=d^2z$, quel que soit $\frac{dy}{dx}$, ce qui donne les trois conditions

$$R=r, \quad S=s, \quad T=t.$$

Et ainsi de suite. En général, pour qu'il y ait un contact complet de l'ordre n, il faut poser

$$1+2+3+\ldots+n+1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

conditions.

740. *Exemples.* — I. *Plan osculateur à une surface.* — L'équation du plan étant $Z=aX+bY+c$, on a

$$P=a, \quad Q=b.$$

Les conditions d'un contact du premier ordre avec une surface

donnée sont donc

$$z = ax + by + c, \quad a = p, \quad b = q,$$

et l'on retrouve ainsi l'équation du plan tangent [637].

II. *Sphère osculatrice à une surface.* — L'équation de la sphère ne contenant que 4 paramètres, on ne peut établir qu'un contact complet du premier ordre, au moyen de trois conditions, et il reste encore une condition arbitraire. En cherchant les points pour lesquels on peut établir entre la sphère et la surface un contact complet du second ordre, on trouverait les ombilics [685].

III. *Paraboloïde osculateur.* — L'équation d'un paraboloïde,

$$z = a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2,$$

renfermant six paramètres, on pourra déterminer ceux-ci de manière que le paraboloïde ait avec la surface un contact complet du second ordre [671].

CHAPITRE III.

APPLICATIONS DE L'INTÉGRATION AU CALCUL DES AIRES, DES VOLUMES, DES CENTRES DE GRAVITÉ, DES MOMENTS D'INERTIE, ETC.

§ I.

QUADRATURE ET RECTIFICATION DES COURBES PLANES.

741. Nous avons défini [233] ce qu'il faut entendre par deux aires équivalentes. Le problème de la quadrature d'une aire plane, terminée par un contour curviligne, consiste à trouver une figure rectiligne équivalente à l'aire donnée, cette figure rectiligne pouvant aisément être transformée en un carré équivalent.

Ce problème général peut toujours se ramener à celui de la quadrature d'une aire limitée d'une part par une courbe donnée, d'autre part par des droites convenablement choisies, qui sont, dans le cas des coordonnées rectilignes, l'axe des x et les deux ordonnées extrêmes; dans le cas des coordonnées polaires, deux rayons vecteurs donnés.

Si l'on demande, par exemple, l'aire d'une courbe fermée, rap-

Fig. 72.

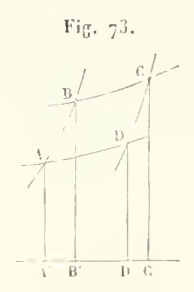


portée à des coordonnées rectilignes, on mènera à cette courbe

deux tangentes AE, CF (*fig.* 72), parallèles à l'axe des y, et l'on cherchera la différence entre les deux aires EABCF, EADCF, comprises entre ces tangentes, l'axe des x, et chacune des deux portions dans lesquelles les points de contact divisent la courbe.

Si l'on considère l'aire comprise à l'intérieur d'un quadrilatère curviligne, tel que ABCD (*fig.* 73), formé par les quatre courbes

Fig. 73.



AB, BC, CD, DA, on mènera les ordonnées des sommets, qui décomposeront cette aire en ABB'A' + BCC'B' — ADD'A' — DCC'D', et l'on évaluera séparément chacune des parties.

On verra de même aisément comment il faudra opérer dans tout autre cas particulier.

742. Nous avons vu [235 et suiv.] que, si l'on suppose les coordonnées rectangulaires, l'aire comprise entre la courbe, l'axe des x et les deux ordonnées extrêmes est la limite commune des sommes des parallélogrammes, intérieurs ou extérieurs, ayant pour bases les divisions infiniment petites de l'abscisse, et pour hauteurs les ordonnées correspondantes. On a donc, pour l'élément d'aire,

$$d\lambda = y\,dx, \quad \text{d'où} \quad \lambda = \int_{x_0}^{X} y\,dx.$$

Si, au lieu d'être rectangulaires, les axes coordonnés faisaient entre eux un angle quelconque θ, l'élément d'aire serait un parallélogramme ayant pour base dx et pour hauteur $y \sin\theta$, et l'on aurait

$$d\lambda = \sin\theta \,.\, y\,dx, \quad \lambda = \sin\theta \int_{x_0}^{X} y\,dx.$$

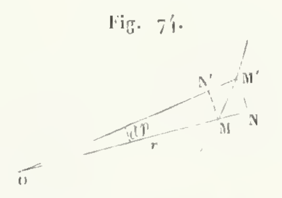
Si l'on considère l'aire comprise entre deux courbes $y = f(x)$, $Y = F(x)$, et les deux ordonnées correspondantes aux abscisses x_0, X, on aura, dans le cas des coordonnées rectangulaires,

$$d\lambda = (Y - y)\,dx, \quad \lambda = \int_{x_0}^{X} (Y - y)\,dx.$$

Si les coordonnées étaient obliques, on multiplierait le résultat par le sinus de l'angle qu'elles font entre elles.

743. Si la courbe est rapportée à des coordonnées polaires, on emploiera un autre mode de décomposition de l'aire. On la partagera en secteurs infinitésimaux, compris entre la courbe et deux rayons vecteurs infiniment voisins. Or si, de l'origine comme centre (*fig.* 74), avec chacun des deux rayons vecteurs comme

Fig. 74.



rayon, on décrit des arcs de cercles MN', M'N, le secteur de la courbe OMM' se trouvera compris entre les deux secteurs circulaires OMN', ONM', qui ont même angle et des rayons infiniment peu différents, et qui par suite diffèrent entre eux infiniment peu. Donc on peut [195] remplacer le secteur OMM' par le secteur circulaire OMN', qui a pour mesure $\frac{1}{2}$ OM $\times$ arc MN' $= \frac{1}{2} r^2 dp$. Telle est donc la valeur de l'élément d'aire, et par suite l'aire totale, comprise entre les rayons vecteurs qui font avec l'axe des x les angles p_0 et P, aura pour valeur

$$\lambda = \frac{1}{2} \int_{p_0}^{P} r^2\,dp.$$

L'aire comprise entre les deux mêmes rayons vecteurs et les deux courbes qui ont pour équations $r = f(p)$, $R = F(p)$, est égale à

$$\lambda = \frac{1}{2} \int_{p_0}^{P} (R^2 - r^2)\,dp.$$

Pour avoir l'aire totale d'une courbe fermée, si l'origine des coordonnées est intérieure à la courbe, on prendra, pour limite de l'intégration par rapport à p, les valeurs o et 2π, ou plus généralement p_0 et $p_0 + 2\pi$. Si l'origine est extérieure à la courbe, on mènera par cette origine les deux tangentes extrêmes à la courbe, correspondantes aux valeurs minimum et maximum de l'angle p, et déterminées généralement par la condition $\frac{dp}{dr} = 0$, ou $\tang\theta = 0$. Si l'on désigne par p_0 et P ces valeurs, et que r et R représentent les rayons vecteurs des deux branches de courbe dans lesquelles les points de contact partagent le contour, on aura, comme ci-dessus,

$$\lambda = \frac{1}{2}\int_{p_0}^{P}(R^2 - r^2)\,dp.$$

744. *Exemples.* — I. Soit la courbe représentée par l'équation

$$y = ax^m.$$

On a $d\lambda = ax^m\,dx$, d'où, en intégrant entre les limites x_0, X, et désignant par y_0, Y les ordonnées correspondantes à ces abscisses,

$$\lambda = \frac{a}{m+1}(X^{m+1} - x_0^{m+1}) = \frac{1}{m+1}(XY - x_0 y_0).$$

Pour m positif, y s'évanouit avec x, et, en faisant $x_0 = 0$, la formule se réduit à $\frac{1}{m+1}XY$. Donc l'aire de la courbe est dans un rapport constant avec le rectangle construit sur les deux coordonnées X, Y du point extrême. Dans la parabole ordinaire, m est égal à 2 ou à $\frac{1}{2}$, suivant que la courbe tourne sa convexité ou sa concavité vers l'axe des x. Alors l'aire comprise entre la courbe et l'axe des x est $\frac{1}{3}$ ou $\frac{2}{3}$ du rectangle des coordonnées de l'extrémité.

Si m est négatif et $= -n$, alors

$$\lambda = \frac{a}{n-1}\left(\frac{1}{x_0^{n-1}} - \frac{1}{X^{n-1}}\right).$$

Pour $n < 1$, et $x_0 = 0$, on a, en supposant $x_0 = 0$,

$$\lambda = \frac{a}{1-n}X^{1-n} = \frac{XY}{1-n},$$

valeur de l'aire asymptotique comprise entre la courbe et l'axe des y. Pour $n > 1$, on a, pour $X = \infty$,

$$\lambda = \frac{1}{n-1} \frac{1}{x_0^{n-1}} = \frac{x_0 y_0}{n-1},$$

valeur de l'aire asymptotique comprise entre la courbe et l'axe des x. On voit que l'une des deux aires asymptotiques est finie, l'autre infinie, quel que soit n différent de l'unité. On passerait d'ailleurs du cas de $n < 1$ au cas de $n > 1$, en échangeant entre eux les axes des x et des y.

Pour $n = 1$, on est dans le cas de l'hyperbole ordinaire, et, en supposant l'angle θ des asymptotes quelconque, on a

$$\lambda = a \sin\theta . \log \frac{X}{x_0},$$

valeur infinie aussi bien pour $x_0 = 0$ que pour $X = \infty$. Donc les deux aires asymptotiques de l'hyperbole ordinaire sont infinies. Si l'on suppose $a = 1$, $x_0 = 1$, on voit que l'aire hyperbolique représente le logarithme de l'abscisse X dans le système dont le module est égal à $\sin\theta$.

II. Soit la cycloïde allongée ou raccourcie, représentée par les équations

$$x = a(nt - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t).$$

On a

$$dx = a\,dt(n - \cos t),$$

d'où

$$\begin{aligned}\int y\,dx &= a^2 \int (1-\cos t)(n - \cos t)\,dt \\ &= a^2\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)t - (1+n)\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t\right] + C \\ &= \left(1 + \frac{1}{2n}\right) a x - \frac{1}{2} a \sin t \left[y + \left(1 - \frac{1}{n}\right) a\right] + C.\end{aligned}$$

La constante est nulle, si l'on compte l'aire à partir de $t = 0$, qui répond à $x = y = 0$.

Dans le cas de la cycloïde ordinaire, $n = 1$, et cette expression se réduit à

$$\frac{1}{2} a(3x - y\sin t) = \frac{3}{2} a x \mp \frac{1}{2} y \sqrt{2ay - y^2},$$

le radical devant être pris avec le signe — ou le signe +, suivant que $\sin t$ est positif ou négatif. Pour $t = 2\pi$, on a $\lambda = 3\pi a^2 =$ le triple de l'aire du cercle générateur.

Dans le cas de la cycloïde raccourcie, $n < 1$. Depuis $t = 0$ jusqu'à la valeur qui donne $\cos t = n$, dx est négatif, et la formule donne l'aire comprise entre l'axe des x et la branche de courbe inférieure, cette aire étant prise négativement. Depuis cette valeur de t jusqu'à celle qui répond à $x = 0$, on a dx positif, et l'intégrale exprime l'aire comprise entre l'axe des x et la branche supérieure de la courbe, cette aire étant prise positivement. Donc l'intégrale, prise de $t = 0$ jusqu'à la plus petite racine positive de l'équation $nt - \sin t = 0$, représente l'aire comprise entre les deux branches de la courbe. En faisant $t = 2\pi$, on verra de même que l'expression $(2n+1)\pi a^2$ représente l'aire comprise entre l'axe des x et le premier arceau de la courbe, dans la concavité de cet arceau.

III. Le folium de Descartes $x^3 - 3axy + y^3 = 0$ peut être représenté, en faisant $y = tx$, par les deux équations

$$x = \frac{3at}{1+t^3}, \quad y = \frac{3at^2}{1+t^3}.$$

On tire de là, en intégrant par parties,

$$\lambda = \int y\,dx = \int tx\,dx = \frac{1}{2}tx^2 - \frac{1}{2}\int x^2\,dt = \frac{1}{2}tx^2 - \frac{9a^2}{2}\int \frac{t^2\,dt}{(1+t^3)^2}$$

$$= \frac{1}{2}tx^2 + \frac{3a^2}{2}\frac{1}{1+t^3} + C = \frac{3a^2}{2}\frac{1+4t^3}{(1+t^3)^2} + C.$$

En raisonnant comme nous venons de le faire pour le cas de la cycloïde raccourcie, on voit aisément que l'on obtiendra l'aire de la partie fermée de la courbe, en prenant l'intégrale depuis $t = \infty$ jusqu'à $t = 0$, ce qui donne $\frac{3a^2}{2}$ pour la valeur de cette aire.

On parviendra au même résultat en rapportant la courbe à des coordonnées polaires, ce qui donne

$$r = \frac{3a\cos p \sin p}{\cos^3 p + \sin^3 p},$$

d'où

$$\lambda = \frac{1}{2}\int r^2\,dp = \frac{9a^2}{2}\int \frac{\operatorname{tang}^2 p . d\operatorname{tang} p}{(1+\operatorname{tang}^3 p)^2} = -\frac{3a^2}{2}\,\frac{1}{1+\operatorname{tang}^3 p} + \mathrm{C}.$$

En intégrant entre les limites $p = 0$ et $p = \frac{\pi}{2}$, on a $\lambda = \frac{3}{2}a^2$.

IV. Dans la spirale d'Archimède, $r = ap$, on a

$$\lambda = \frac{1}{2}\int_{p_0}^{\mathrm{P}} a^2 p^2\,dp = \frac{1}{6}a^2(\mathrm{P}^3 - p_0^3) = \frac{1}{6a}(\mathrm{R}^3 - r_0^3).$$

En faisant $p_0 = 0$, $\mathrm{P} = 2\pi$, on a, pour l'aire de la première circonvolution,

$$\lambda_1 = \frac{4}{3}\pi^3 a^2;$$

c'est le tiers de l'aire du cercle de rayon $2\pi a$. Pour avoir l'aire entourée par la seconde spire, on fera $p_0 = 2\pi$, $\mathrm{P} = 4\pi$, d'où

$$\lambda_2 = \frac{a^2}{6}(64\pi^3 - 8\pi^3) = \frac{28a^2\pi^3}{3}.$$

En général, l'aire terminée par la $n^{\text{ième}}$ spire et par une portion de l'axe des x a pour expression

$$\begin{aligned}\lambda_n &= \frac{a^2}{6}[(2n\pi)^3 - (2n-2)^3\pi^3] \\ &= \frac{4}{3}\pi^3 a^2[n^3 - (n-1)^3] = \frac{4}{3}\pi^3 a^2(3n^2 - 3n + 1).\end{aligned}$$

L'aire comprise entre la $n^{\text{ième}}$ spire et la $(n-1)^{\text{ième}}$ est

$$\lambda_n - \lambda_{n-1} = \frac{4}{3}\pi^3 a^2[n^3 - 2(n-1)^3 + (n-2)^3] = 8\pi^3 a^2(n-1).$$

On trouve ainsi $\lambda_2 - \lambda_1 = 8\pi^3 a^2$.

745. *Aire comprise entre une courbe et sa développée.* — En considérant l'aire comprise entre la développée et deux rayons de courbure infiniment voisins, on voit aisément que cette aire a pour expression $d\lambda = \frac{1}{2}\rho^2\,d\tau$. La somme de ces aires élémentaires ou l'aire comprise entre la courbe, la développée et les deux rayons

de courbure extrêmes sera donc

$$\lambda = \frac{1}{2}\int \rho^2\, d\tau = \frac{1}{2}\int \rho\, ds = \frac{1}{2}\int \frac{ds^2}{d\tau^2} = \frac{1}{2}\int \frac{(1+y'^2)^2}{y''}\, dx.$$

Exemple. — Pour la cycloïde ordinaire, on a

$$\rho = 4a \sin\frac{1}{2}t, \qquad ds = 2a\, dt \sin\frac{1}{2}t,$$

d'où

$$\lambda = \frac{1}{2}\int \rho\, ds = \int 2a^2(1-\cos t)\, dt = 2a^2(t - \sin t) = 2ax.$$

746. *Rectification des courbes.* — Nous avons déjà vu [540] des exemples de rectification des courbes planes. Traitons encore ici quelques cas.

I. Considérons l'ellipse, représentée par les équations

$$x = a\cos t, \qquad y = b \sin t.$$

On en tire, en posant $a^2 - b^2 = a^2 e^2$,

$$ds^2 = a^2\, dt^2 (1 - e^2 \cos^2 t).$$

En posant donc $\varphi = \frac{\pi}{2} - t$, on a, pour l'arc compté à partir du sommet du petit axe,

$$s = a\int_0^{\varphi} d\varphi \sqrt{1 - e^2 \sin^2\varphi}.$$

L'arc est donc exprimé par une intégrale elliptique de seconde espèce [455].

Théorème de Fagnano. — Si l'on désigne, comme au n° 519, par g la perpendiculaire abaissée de l'origine des coordonnées sur la tangente, et par h la projection du rayon vecteur sur la tangente, comptée positivement ou négativement suivant que l'angle θ est aigu ou obtus, on a

$$g = r \sin\theta, \qquad h = r\cos\theta,$$

d'où

$$dh = -g\, d\theta + \cos\theta\, dr.$$

On a maintenant

$$d\tau = d\theta + dp, \quad \cos\theta = \frac{dr}{ds}, \quad \sin\theta = \frac{r\,dp}{ds}.$$

Donc

$$dh + g\,d\tau = g\,dp + \cos\theta\,dr = \frac{r^2\,dp^2 + dr^2}{ds} = ds,$$

formule qu'il est facile de démontrer géométriquement.

Si l'on désigne par υ l'angle de la perpendiculaire g avec l'axe des x, on a

$$\upsilon = \tau - \frac{\pi}{2},$$

d'où l'on tire

(1) $$ds = dh + g\,d\upsilon,$$

(2) $$g = x\cos\upsilon + y\sin\upsilon, \quad h = -x\sin\upsilon + y\cos\upsilon.$$

Si nous considérons maintenant l'ellipse, la relation

$$dx\cos\upsilon + dy\sin\upsilon = 0$$

donne, en mettant pour dx, dy les valeurs $-a\sin t\,dt$, $b\cos t\,dt$,

$$\frac{\cos\upsilon}{b\cos t} = \frac{\sin\upsilon}{a\sin t} = \sqrt{\frac{\cos^2\upsilon}{b^2} + \frac{\sin^2\upsilon}{a^2}} = \frac{\sqrt{1 - e^2\sin^2\upsilon}}{b},$$

d'où l'on tire

$$x = \frac{a\cos\upsilon}{\sqrt{1 - e^2\sin^2\upsilon}}, \quad y = \frac{\frac{b^2}{a}\sin\upsilon}{\sqrt{1 - e^2\sin^2\upsilon}},$$

$$g = a\sqrt{1 - e^2\sin^2\upsilon}, \quad h = -\frac{a e^2\sin\upsilon\cos\upsilon}{\sqrt{1 - e^2\sin^2\upsilon}}.$$

Fig. 75.

L'équation (1) donne donc, pour l'arc AM (*fig.* 75), compté à

partir du sommet A, qui correspond à $t = 0$, $\upsilon = 0$ et $h = 0$,

$$s = h + a\int_0^{\upsilon} d\upsilon\sqrt{1 - e^2\sin^2\upsilon}.$$

En appelant s' l'arc compté à partir du sommet B, on a, d'après ce que nous avons vu,

$$s' = a\int_0^{\varphi} d\varphi\sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi}.$$

Si donc on prend $\varphi = \upsilon$, on aura $s = s' + h$, c'est-à-dire

$$\text{AM} = \text{BM}' - \text{MT}.$$

On a donc ainsi deux arcs d'ellipse, dont la différence est égale à une ligne droite facile à construire. Il vient, à cause de $\varphi = \upsilon$,

$$-h = \frac{e^2}{a}\,\frac{a\cos\upsilon}{\sqrt{1 - e^2\sin^2\upsilon}}\cdot a\sin\varphi = \frac{e^2}{a}\cdot xx',$$

x et x' étant les abscisses OP, OP$'$ des points M et M$'$.

II. Soit la cycloïde allongée ou raccourcie [744, II]. On a

$$dx = a\,dt(n - \cos t), \quad dy = a\,dt\sin t,$$

d'où l'on tire

$$ds = a(1+n)\,dt\sqrt{1 - \frac{4n}{(1+n)^2}\sin^2\frac{1}{2}t}.$$

On voit par là que la rectification de cette courbe se ramène à celle d'une ellipse dont le demi-grand axe serait $2a(1+n)$, et l'excentricité $\frac{2\sqrt{n}}{1+n}$, $\frac{1}{2}t$ étant le complément de l'anomalie excentrique.

§ II.

CUBATURE ET COMPLANATION DES SURFACES CYLINDRIQUES ET CONIQUES ET DES SURFACES DE RÉVOLUTION.

747. *Surfaces cylindriques.* — Une surface cylindrique est engendrée par une droite mobile (*génératrice*), qui se déplace parallèlement à elle-même, en s'appuyant sur une courbe fixe (*directrice*).

Toute courbe tracée sur la surface peut être prise comme directrice.

Toutes les sections faites dans la surface par des plans parallèles sont égales entre elles. On appelle *section droite* celle qui est faite par un plan perpendiculaire aux génératrices.

Un plan tangent à la surface est la limite d'un plan passant par deux génératrices infiniment voisines. Ce plan est tangent tout le long de la génératrice qu'il contient.

Le cylindre qui a pour directrice un polygone inscrit ou circonscrit à la directrice d'un cylindre donné est un *prisme* inscrit ou circonscrit au cylindre donné.

Si l'on considère le volume compris entre une surface cylindrique et deux sections parallèles entre elles, de même que l'aire de la section est la limite de celle d'un polygone inscrit ou circonscrit, de même le volume du cylindre est la limite d'un prisme inscrit ou circonscrit à ce cylindre.

Le volume d'un prisme est égal au produit de sa base par sa hauteur, ou encore au produit de sa section droite par son arête. On en conclut que le volume du cylindre a aussi pour expression le produit de sa base par sa hauteur, ou le produit de sa section droite par son arête.

748. Considérons une portion de surface cylindrique comprise, d'une part, entre deux génératrices données, et, d'autre part, entre deux plans parallèles. Si l'on considère les prismes infinitésimaux inscrits ou circonscrits à cette portion de surface cylindrique, ils auront pour arête commune l'arête du cylindre, et pour sections droites des polygones infinitésimaux inscrits ou circon-

scrits à la section droite du cylindre. La surface d'un quelconque de ces prismes est égale à son arête multipliée par le périmètre de sa section droite. Or les périmètres de toutes ces sections droites ont pour limite commune le périmètre de la section droite du cylindre. Donc les surfaces de tous les prismes infinitésimaux inscrits et circonscrits tendent vers une limite commune, qui est dite l'aire de la portion de surface cylindrique, et qui a pour expression le produit de l'arête du cylindre par le périmètre de sa section droite. Ainsi, en appelant l la longueur de l'arête, ds l'élément d'arc de la section droite, l'aire de la surface cylindrique sera exprimée par l'intégrale $l\int ds$.

Plus généralement, si la portion de surface cylindrique est terminée par deux courbes quelconques, au lieu de deux sections parallèles, la longueur l de l'arête sera variable, et dépendra du point de rencontre de la génératrice avec la section droite. Elle pourra donc être considérée comme une fonction de l'arc s de la section droite, et l'aire cylindrique sera la limite de la somme de parallélogrammes infinitésimaux ayant pour hauteur ds et pour base l. On aura donc, pour expression de l'aire, $\int l\,ds$.

Par exemple, l'aire comprise entre la section droite et l'hélice déterminée par l'équation $l = as + b$ a pour valeur

$$\int_{s_0}^{s} (as + b)\,ds = (s - s_0)\left(a\,\frac{s + s_0}{2} + b\right).$$

749. On aurait pu tirer immédiatement toutes ces conséquences de la considération du développement d'une surface cylindrique sur un plan, et des résultats démontrés pour les figures planes. Supposons que l'on développe sur un plan la surface prismatique infinitésimale, dont la surface cylindrique est la limite. Chaque figure tracée sur le cylindre pouvant être regardée comme la limite d'une certaine figure tracée sur la surface prismatique, la limite vers laquelle tend le développement de celle-ci sera dite le développement de la figure cylindrique. Ainsi la limite d'une portion du périmètre de la section droite du prisme étant la portion correspondante de l'arc de la section droite du cylindre, la limite de la droite suivant laquelle se développera le périmètre de la section droite du prisme sera une droite, de même longueur que la section

droite du cylindre, et qui sera le développement de cette section droite.

On voit aisément que, si une figure est donnée sur la surface cylindrique par la relation entre l'arc s et la portion de génératrice l comprise entre la courbe et la section droite, cette équation représentera encore le développement de la figure sur un plan, lorsqu'on y considérera s et l comme des coordonnées rectangulaires. On voit de cette manière que le développement d'une hélice est une ligne droite, d'où il résulte que l'hélice est la ligne la plus courte entre deux de ses points sur la surface du cylindre.

750. *Surfaces coniques.* — Un cône est une surface engendrée par le mouvement d'une droite (*génératrice*) mobile autour d'un point fixe (*sommet*), et s'appuyant constamment sur une ligne fixe (*directrice*). Lorsque la directrice est une courbe plane, on lui donne le nom de *base* du cône.

Le plan tangent à un cône est la limite d'un plan passant par deux génératrices infiniment voisines.

Si l'on prend pour directrice, au lieu de la courbe directrice d'un cône, un polygone infinitésimal inscrit ou circonscrit à cette courbe, on obtiendra une surface *pyramidale* infinitésimale, inscrite ou circonscrite à la surface conique. Les sections faites dans cette surface pyramidale par des plans parallèles étant des polygones semblables, on en conclut que les sections du cône, faites par des plans parallèles, sont des courbes semblables.

Si l'on considère le volume compris entre la surface conique et une section plane, prise pour base, ce volume sera la limite commune des volumes des pyramides de même sommet, ayant pour bases des polygones infinitésimaux inscrits ou circonscrits à la base du cône. Donc le volume du cône est égal au tiers du produit de sa base multipliée par sa hauteur.

C'est ce que l'on peut voir directement, en décomposant le cône en tranches infiniment minces par des plans parallèles à la base, et remarquant que chaque tranche diffère infiniment peu d'un cylindre de même hauteur et ayant pour base une des bases de la tranche. Or, si h est la hauteur du cône et b sa base, l'aire de la section faite parallèlement à la base par un plan situé à la distance z

du sommet sera $\frac{z^2}{h^2}b$. Donc le volume de la tranche sera $\frac{z^2}{h^2}b\,dz$, et par suite le volume du cône entier sera

$$\int_0^h \frac{z^2}{h^2}b\,dz = \frac{1}{3}hb.$$

On trouverait, pour le volume d'un cône tronqué,

$$\begin{aligned} V = \int_z^h \frac{z^2}{h^2}b\,dz = \frac{h^3 - z^3}{3h^2}b = \frac{b}{3h^2}(h^2 + hz + z^2)(h - z) \\ = \frac{h-z}{3}\left(b + \frac{h}{z}b + \frac{h^2}{z^2}b\right), \end{aligned}$$

ce qui conduit à l'expression connue en Géométrie élémentaire.

751. Considérons maintenant la portion de surface conique comprise entre deux génératrices données et une courbe tracée sur la surface; inscrivons et circonscrivons à cette surface des pyramides infinitésimales, ayant pour bases des polygones infinitésimaux, inscrits ou circonscrits à la courbe donnée. Si SAB est une des faces de la pyramide inscrite, par exemple, son plan fera des angles infiniment petits avec les plans des faces des pyramides, tant inscrites que circonscrites, que l'on obtiendra en subdivisant l'arc AB. Donc les surfaces de ces portions de pyramides différeront infiniment peu (c'est-à-dire d'infiniment petits du troisième ordre) de leurs projections sur le plan SAB. Or la différence entre une de ces projections et le triangle SAB est la projection d'une portion de polygone infinitésimal dont les côtés font des angles infiniment petits avec AB, et il est aisé de voir que cette projection est encore infiniment petite du troisième ordre. On en conclut que les éléments superficiels correspondants, dans toutes les pyramides infinitésimales, diffèrent entre eux infiniment peu, et par suite les sommes de ces éléments tendent vers la même limite. Cette limite commune des portions de surfaces pyramidales inscrites et circonscrites s'appelle l'*aire de la surface conique*.

Si l'on désigne par r l'un des côtés finis d'une face infinitésimale d'une pyramide inscrite ou circonscrite, et par dp l'angle infiniment petit au sommet du triangle, l'aire du triangle sera

$\frac{1}{2} r^2 dp$. Donc l'aire de la portion de surface conique sera $\frac{1}{2} \int r^2 dp$.

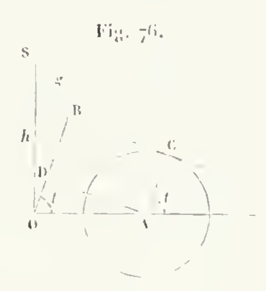
C'est ce que l'on conclurait aussi, en considérant, comme on l'a fait au n° 749 pour le cylindre, le développement de la surface conique sur un plan. La portion considérée aura pour développement un secteur terminé par une courbe dont r et p seront les coordonnées polaires.

752. On peut encore exprimer autrement l'aire d'une surface conique. Si l'on appelle g la perpendiculaire abaissée du sommet du cône sur la base de chaque triangle infinitésimal, c'est-à-dire sur la tangente en chaque point de la courbe de base du cône, l'aire de ce triangle sera $\frac{1}{2} g\,ds$. Donc l'aire du cône sera exprimée par l'intégrale $\frac{1}{2} \int g\,ds$. Cette formule subsiste, quelle que soit la nature de la courbe de base, plane ou non plane.

Exemple. — Calculer la surface d'un cône oblique à base circulaire.

Soient h la perpendiculaire abaissée du sommet sur le plan de la base, b la distance du pied de cette perpendiculaire au centre du cercle A (*fig.* 76), a le rayon AC du cercle, t l'angle que fait la

Fig. 76.



ligne OA avec le rayon AC, g la perpendiculaire SB abaissée du sommet du cône sur la tangente au cercle en C. On a

$$OB = BD + DO = a + b \cos t,$$

d'où

$$SB = g = \sqrt{h^2 + (a + b \cos t)^2};$$

d'ailleurs $ds = a\,dt$. Donc l'aire du cône est donnée par l'intégrale

$$\frac{1}{2} a \int dt \sqrt{h^2 + (a + b\cos t)^2},$$

qui se ramène aux intégrales elliptiques.

Si le cône est de révolution, $b = 0$, $g =$ l'arête $\sqrt{h^2 + a^2}$, et l'intégrale, prise de 0 à 2π, donne, pour la surface cherchée, $\pi a g$.

L'aire d'un tronc de cône de révolution, comprise entre les plans menés aux distances h et nh du sommet, sera la différence des deux surfaces $\pi a g$ et $\pi . na . ng$, savoir

$$\pi(ag - na . ng) = \pi(1 - n) g (a + na) = (1 - n) g \frac{2\pi a + 2\pi n a}{2},$$

ce qui donne l'expression connue dans les éléments de Géométrie.

Si donc une droite, de longueur s, et dont les extrémités ont pour ordonnées y_1, y_2, tourne autour de l'axe des x, l'aire du tronc de cône qu'elle décrit aura pour expression

$$2\pi \frac{y_1 + y_2}{2} s.$$

753. *Surfaces de révolution.* — Si nous supposons une courbe quelconque tournant autour d'un axe fixe, la surface engendrée sera dite une *surface de révolution*. La droite fixe est l'*axe de révolution;* les sections faites par des plans perpendiculaires à l'axe de révolution sont des cercles, que l'on nomme les *parallèles* de la surface. Les sections faites par des plans passant par l'axe sont des courbes, toutes égales entre elles, et que l'on nomme les *méridiens*. Toute surface de révolution peut être considérée comme engendrée par la révolution de son méridien autour de son axe.

Le volume compris entre une surface de révolution et deux parallèles donnés est la limite de la somme des tranches infiniment minces, comprises entre des parallèles infiniment rapprochés. Or une de ces tranches diffère infiniment peu d'un cylindre ayant pour base un des deux parallèles correspondants, et pour hauteur la distance de ces parallèles. Si donc on prend l'axe de révolution pour axe des x, et que $y = f(x)$ soit l'équation de la courbe méridienne dans son plan, la base de la tranche cylindrique sera

πy^2, et sa hauteur dx. Donc le volume cherché aura pour expression

$$\pi \int y^2\, dx.$$

Ainsi, en supposant que le méridien soit une ellipse,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

le volume total sera [460]

$$\pi \int_{-a}^{+a} b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = 2\pi \int_0^a b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \frac{4}{3} \pi a b^2.$$

754. Supposons que l'on ait inscrit dans la courbe méridienne un polygone infinitésimal. L'aire engendrée par la révolution de ce polygone sera la somme des aires $2\pi \frac{y_1 + y_2}{2} ds$, engendrées par chacun de ses côtés ds [752]. Les ordonnées y_1, y_2 étant infiniment peu différentes entre elles, et ds différant infiniment peu de l'élément d'arc de la courbe méridienne, la limite de la somme de ces aires infinitésimales sera représentée par l'intégrale

$$2\pi \int y\, ds,$$

et cette limite sera dite l'aire de la surface de révolution.

Exemples. — I. *Aire de l'ellipsoïde allongé*, engendré par l'ellipse

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t,$$

tournant autour de son grand axe $2a$. La formule précédente donne [746]

$$S = 2\pi \int b \sin t \,.\, a\, dt \sqrt{1 - e^2 \cos^2 t} = -2\pi b \int dx \sqrt{1 - \frac{e^2 x^2}{a^2}},$$

ou, en posant $\frac{ex}{a} = \sin\varphi$, d'où $dx = \frac{a}{e} \cos\varphi\, d\varphi$,

$$S = -\frac{2\pi ab}{e} \int \cos^2\varphi\, d\varphi = -\frac{\pi ab}{e} (\varphi + \sin\varphi \cos\varphi) + C$$
$$= -\frac{\pi ab}{e} \left(\text{arc sin} \frac{ex}{a} + \frac{ex}{a} \sqrt{1 - \frac{e^2 x^2}{a^2}} \right) + C.$$

Pour avoir l'aire totale, on prendra l'intégrale depuis $x = a$ jus-

qu'à $x = 0$, et l'on doublera, ce qui donnera

$$S = 2\pi ab\left(\sqrt{1-e^2} + \frac{\operatorname{arc\,sin} e}{e}\right).$$

II. *Aire de l'ellipsoïde aplati.* — En faisant tourner l'ellipse précédente autour de l'axe des y, on aura, en posant $f = \sqrt{1-e^2}$, $\frac{ey}{bf} = \operatorname{Sh}\varphi$,

$$s = 2\pi \int x\,ds = 2\pi a^2 \int \cos t\,dt \sqrt{1 - e^2\cos^2 t} = \frac{2\pi a^2 f}{b}\int dy \sqrt{1 + \frac{e^2 y^2}{b^2 f^2}}$$

$$= \frac{2\pi b^2}{e}\int \operatorname{Ch}^2\varphi\,d\varphi = \frac{\pi b^2}{e}(\varphi + \operatorname{Sh}\varphi \operatorname{Ch}\varphi) + C$$

$$= \frac{\pi b^2}{e}\left(\operatorname{Arg\,Sh}\frac{ey}{bf} + \frac{ey}{bf}\sqrt{1 + \frac{e^2y^2}{b^2f^2}}\right) + C.$$

Intégrant entre les limites $y = 0$, $y = b$, et doublant, on a, pour la surface totale de l'ellipsoïde aplati, à cause de $a^2 f^2 = b^2$, $e^2 + f^2 = 1$,

$$2\pi a^2\left(1 + \frac{f^2}{e}\operatorname{Arg\,Sh}\frac{e}{f}\right) = 2\pi\left(a^2 + \frac{b^2}{e}\log\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\right).$$

En supposant, dans l'un ou l'autre des deux ellipsoïdes, e infiniment petit, on retrouve comme limite l'expression connue de la surface de la sphère.

§ III.

CUBATURE ET COMPLANATION DES SURFACES QUELCONQUES.

755. Nous avons vu [473, 474] comment le volume compris entre deux surfaces (dont l'une peut être le plan des xy), deux plans parallèles au plan des zy, et deux cylindres parallèles à l'axe des z (pouvant se réduire à deux plans parallèles au plan des zx), se ramène au calcul d'une intégrale double

$$\iint z\,dx\,dy, \quad \text{ou} \quad \iint (Z - z)\,dx\,dy,$$

et comment on évalue une semblable intégrale.

Si la base du volume était un quadrilatère curviligne quelconque ou une courbe fermée, on opérerait des décompositions analogues

à celles que nous avons indiquées [741] pour les cas semblables dans la quadrature des courbes planes.

Si le volume est terminé par une surface fermée, on commencera par déterminer le *contour apparent* de cette surface sur le plan des xy, en circonscrivant à la surface un cylindre parallèle à l'axe des z. Pour cela, si l'on représente par $F(x, y, z) = 0$ l'équation de la surface, on exprimera que le plan tangent en un point est parallèle à l'axe des z, en posant [646] $\frac{\partial F}{\partial z} = 0$, et l'élimination de z entre cette équation et celle de la surface donnera l'équation du cylindre circonscrit à la surface et parallèle à l'axe des z, et en même temps l'équation du contour apparent, base de ce cylindre. La courbe de contact de ce cylindre partagera la surface en deux portions : soient z et Z les ordonnées de ces deux portions pour un même système de valeurs de x et de y. On obtiendra le volume renfermé dans la surface en prenant la différence des volumes

$$\iint z\,dx\,dy, \quad \iint Z\,dx\,dy,$$

compris entre chacune de ces portions de surface et le plan des xy, de sorte qu'on aura

$$V = \iint (Z - z)\,dx\,dy,$$

les limites des deux intégrations devant être déterminées conformément à ce que nous avons dit.

756. *Exemples.* — I. Cherchons le volume compris entre la surface

$$z = ax^m + by^n,$$

les trois plans coordonnés, et deux plans quelconques parallèles l'un au plan des zx, l'autre au plan des zy. On a, en intégrant d'abord par rapport à x,

$$\int_0^x z\,dx = \frac{ax^{m+1}}{m+1} + bxy^n;$$

puis, en intégrant par rapport à y,

$$V = xy\left(\frac{ax^m}{m+1} + \frac{by^n}{n+1}\right).$$

Si l'on avait $m = n$, on trouverait, pour le volume de la surface $z = ax^m + by^m$,

$$V = \frac{xyz}{m+1}.$$

Ces résultats supposent $m+1$ et $n+1$ positifs. Si ces nombres étaient négatifs, on discuterait les divers cas qui pourraient se présenter, comme on l'a fait pour une question analogue au n° 744.

II. On demande le volume de l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Il faut calculer, pour cela, l'intégrale double

$$V = c\int\int dx\,dy\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}.$$

Le contour apparent de la surface sur le plan des xy n'étant autre que la section principale $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, cette dernière relation indiquera quelles devront être les limites de l'intégration. Si nous intégrons d'abord par rapport à y, posons

$$\frac{y}{b} = \sin\varphi\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}},$$

d'où

$$dy = b\cos\varphi\,d\varphi\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}},$$

et par suite

$$\int z\,dy = \frac{\partial V}{\partial x} = bc\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)\int \cos^2\varphi\,d\varphi = bc\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)\frac{1}{2}(\varphi + \sin\varphi\cos\varphi) + C.$$

En intégrant de $y = 0$ à $y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$, ou de $\varphi = 0$ à $\varphi = \frac{\pi}{2}$, puis quadruplant le résultat, on aura l'aire de la section de l'ellipsoïde, parallèle au plan des zx, savoir

$$\pi bc\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right).$$

Multipliant maintenant par dx, intégrant de 0 à a, puis doublant

le résultat, on aura enfin, pour le volume cherché,

$$V = \frac{4}{3}\pi abc.$$

III. Calculer le volume compris entre le plan des xy, le paraboloïde hyperbolique $xy = az$, et le cylindre

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = k^2.$$

On cherchera d'abord l'intégrale $\frac{1}{a}\int xy\,dy = \frac{1}{2a}xy^2$, prise entre les limites $y_1 = \beta - \sqrt{k^2 - (x-\alpha)^2}$ et $y_2 = \beta + \sqrt{k^2-(x-\alpha)^2}$, ce qui donnera

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{x}{2a}(y_2^2 - y_1^2) = \frac{x}{2a}(y_2+y_1)(y_2-y_1) = \frac{2\beta x}{a}\sqrt{k^2-(x-\alpha)^2}.$$

En intégrant maintenant par rapport à x, et posant $x-\alpha = k\sin\varphi$, il vient

$$\begin{aligned}\int\frac{2\beta x}{a}dx\sqrt{k^2-(x-\alpha)^2} &= \frac{2\beta k^2}{a}\int(\alpha + k\sin\varphi)\cos^2\varphi\,d\varphi\\ &= \frac{\alpha\beta k^2}{a}(\varphi + \sin\varphi\cos\varphi) - \frac{2\beta k^3}{3a}\cos^3\varphi + C.\end{aligned}$$

Il faut maintenant prendre pour limites $x = \alpha - k$ et $x = \alpha + k$, ou $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ et $\varphi = +\frac{\pi}{2}$, ce qui réduit l'expression précédente à

$$V = \frac{\pi\alpha\beta k^2}{a}.$$

757. Calculons maintenant le volume limité par une surface rapportée à des coordonnées polaires, qui sont le rayon vecteur r, la longitude p et la latitude q. Décomposons, pour cela, le volume en éléments pyramidaux infiniment petits, compris entre deux méridiens de longitudes p et $p + dp$, et deux parallèles de latitudes q et $q + dq$. Si l'on coupe la pyramide par une sphère de rayon r, on pourra considérer la pyramide comme ayant pour hauteur r et pour base le quadrilatère sphérique dont les dimensions sont, suivant le méridien, $r\,dp$, et suivant le parallèle (dont le rayon est $r\cos q$), $r\cos q\,dq$. La surface de cette base étant donc $r^2\cos q\,dp\,dq$,

le volume de la pyramide sera $\frac{1}{3}r^3\cos q\,dp\,dq$, et par suite le volume total sera donné par l'intégrale

$$V = \frac{1}{3}\iint r^3 \cos q\, dp\, dq,$$

prise entre des limites convenables, après qu'on y aura remplacé r par sa valeur en p, q, déterminée par l'équation de la surface.

758. *Quadrature des surfaces courbes.* — Considérons la portion de surface courbe qui se projette suivant l'élément superficiel $dx\,dy$ du plan des xy. Les plans tangents menés par les divers points de cette portion de surface feront tous avec le plan des xy des angles qui diffèrent infiniment peu de celui qui a pour cosinus $\frac{1}{\sqrt{p^2+q^2+1}}$, p et q désignant les dérivées partielles $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$. Si donc on forme avec ces plans tangents un polyèdre infinitésimal quelconque, circonscrit à la portion de surface considérée, l'aire de ce polyèdre différera infiniment peu de $dx\,dy\sqrt{1+p^2+q^2}$. Donc la somme de ces aires polyédriques infinitésimales, correspondante à une étendue finie de la surface courbe, aura une limite déterminée, exprimée par l'intégrale double

$$\iint dx\,dy\sqrt{p^2+q^2+1},$$

prise entre des limites convenables, que l'on déterminera comme on vient de le faire pour le problème des cubatures. Cette limite des surfaces polyédriques infinitésimales circonscrites est dite l'*aire de la surface courbe*.

759. *Exemple.* — I. Soit proposé de calculer l'aire d'un demi-fuseau sphérique ABC (*fig.* 77), compris, sur la sphère

$$x^2+y^2+z^2=a^2,$$

entre le plan des xy, celui des zx et un plan passant par l'axe des z et faisant avec le plan des zx l'angle θ. On aura à calculer l'intégrale double

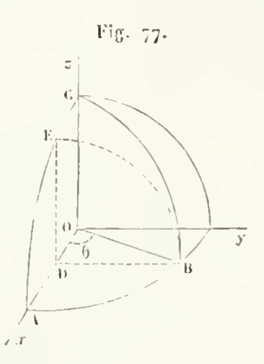
$$\int\int\frac{a\,dx\,dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}.$$

Intégrons d'abord par rapport à y, ce qui donne

$$\int \frac{dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} = \text{arc sin} \frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2}} + C.$$

Il faudra prendre pour limites, d'une part, l'axe des x correspon-

Fig. 77.



dant à $y = 0$, d'autre part la droite OB pour une portion de l'intégrale, et l'arc de cercle BA pour l'autre portion. L'équation de OB étant $y = x \operatorname{tang} \theta$, la valeur de l'intégrale sera, dans l'étendue projetée sur OBD,

$$(1) \qquad a.\text{arc sin} \frac{x \operatorname{tang} \theta}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Pour la seconde partie, l'équation du cercle BA étant $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, la valeur de l'intégrale sera

$$(2) \qquad a.\text{arc sin}\, 1 = a.\frac{\pi}{2}.$$

Il faut maintenant intégrer par rapport à x l'expression (1) entre $x = 0$ et $x = a \cos \theta$, l'expression (2) entre $x = a \cos \theta$ et $x = a$. Si l'on pose

$$\frac{x \operatorname{tang} \theta}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sin \varphi,$$

l'expression (1), multipliée par dx, prend la forme $a \varphi dx$, d'où

$$a \int \varphi dx = a x.\varphi - a \int x d\varphi$$

$$= a x.\varphi - a^2 \int \frac{\sin \varphi\, d\varphi}{\sqrt{\text{séc}^2 \theta - \cos^2 \varphi}} = a x.\varphi + a^2 \text{ arc sin}(\cos \varphi \cos \theta) + C$$

$$= a x.\text{arc sin} \frac{x \operatorname{tang} \theta}{\sqrt{a^2 - x^2}} + a^2 \text{ arc sin} \sqrt{\frac{a^2 \cos^2 \theta - x^2}{a^2 - x^2}} + C.$$

Pour $x = 0$, cette expression se réduit à

$$a^2 \operatorname{arc}\sin(\cos\theta) = a^2\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right);$$

pour $x = a\cos\theta$, elle devient

$$a^2 \cos\theta . \operatorname{arc}\sin 1 = \frac{\pi}{2} a^2 \cos\theta.$$

Donc l'aire de la portion BCE est

$$a^2\theta - \frac{\pi}{2} a^2 (1 - \cos\theta).$$

En intégrant maintenant l'expression (2) de $x = a\cos\theta$ à $x = a$, on trouve

$$\frac{\pi}{2} a^2 (1 - \cos\theta).$$

Donc la somme des deux parties, ou le demi-fuseau $\mathrm{ABC} = a^2\theta$.

II. Calculer l'aire de la partie de la surface

$$z^2 + (x\cos\alpha + y\sin\alpha)^2 = a^2,$$

qui est comprise dans l'angle trièdre des coordonnées positives.

Cette surface est un cylindre de révolution, dont l'axe, situé dans le plan des xy, a pour équation $x\cos\alpha + y\sin\alpha = 0$. L'équation de la surface donne

$$p = -\frac{\cos\alpha}{z}(x\cos\alpha + y\sin\alpha), \quad q = -\frac{\sin\alpha}{z}(x\cos\alpha + y\sin\alpha),$$

d'où

$$\mathrm{S} = \int\int \frac{a\,dx\,dy}{z} = \int\int \frac{a\,dx\,dy}{\sqrt{a^2 - (x\cos\alpha + y\sin\alpha)^2}}.$$

En intégrant d'abord par rapport à y, on a l'intégrale indéfinie

$$a\,dx \int \frac{dy}{\sqrt{a^2 - (x\cos\alpha + y\sin\alpha)^2}} = \frac{a\,dx}{\sin\alpha} \operatorname{arc}\sin \frac{x\cos\alpha + y\sin\alpha}{a} + \mathrm{C}.$$

Pour avoir la portion située au-dessus du plan des xy et en avant du plan des zx, on intégrera depuis $y = 0$ jusqu'à la valeur

$$y = \frac{1}{\sin\alpha}(a - x\cos\alpha),$$

qui répond à $z = 0$ et au contour apparent du cylindre. L'expression précédente devient alors

$$\frac{a\,dx}{\sin\alpha}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,sin}\frac{x\cos\alpha}{a}\right).$$

Il faut maintenant intégrer cette différentielle entre les limites $x = 0$ et $x = \dfrac{a}{\cos\alpha}$, cette dernière correspondant à $z = y = 0$. En posant

$$\frac{x\cos\alpha}{a} = \cos\varphi, \quad \text{d'où} \quad dx = -\frac{a\sin\varphi}{\cos\alpha}\,d\varphi,$$

l'intégrale devient

$$\frac{a^2}{\sin\alpha\cos\alpha}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\varphi.\sin\varphi\,d\varphi = \frac{a^2}{\sin\alpha\cos\alpha}\Big[-\varphi\cos\varphi + \sin\varphi\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^2}{\sin\alpha\cos\alpha}.$$

On voit que cette aire est carrable.

760. *Formules générales pour les quadratures et les cubatures des surfaces au moyen des coordonnées curvilignes.* — Tout point de l'espace, déterminé par les coordonnées rectangulaires x, y, z, peut être considéré comme l'intersection de trois surfaces, données par les équations

$$(1) \qquad f_1(x, y, z) = u, \quad f_2(x, y, z) = v, \quad f_3(x, y, z) = w.$$

En faisant varier les paramètres u, v, w, le point d'intersection M variera suivant une loi quelconque, et ces trois paramètres pourront être considérés comme les coordonnées de ce point. On les désigne sous le nom de *coordonnées curvilignes*. Nous allons voir comment on peut, à l'aide de semblables coordonnées, déterminer l'aire d'une surface donnée ou le volume d'un corps donné.

Supposons d'abord que

$$(2) \qquad f_3(x, y, z) = w$$

représente une surface donnée, et considérons, par analogie avec ce que nous avons fait au nº 477, l'aire du parallélogramme infinitésimal compris sur la surface (2) entre les surfaces $f_1 = u$, $f_2 = v$, et les surfaces obtenues en changeant u en $u + du$, v en $v + dv$. Les coordonnées des deux sommets de ce parallélogramme con-

tigus au sommet (x, y, z) seront

$$(x + d_u x,\quad y + d_u y,\quad z + d_u z),\quad (x + d_v x,\quad y + d_v y,\quad z + d_v z).$$

Donc les aires des projections de ce parallélogramme sur les trois plans des yz, des zx et des xy seront [126]

$$\begin{vmatrix} d_u y & d_u z \\ d_v y & d_v z \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} d_u z & d_u x \\ d_v z & d_v x \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} d_u x & d_u y \\ d_v x & d_v y \end{vmatrix}.$$

Par conséquent, l'aire du parallélogramme lui-même sera la racine carrée de la somme des carrés de ses projections, c'est-à-dire

$$\sqrt{\begin{vmatrix} d_u y & d_u z \\ d_v y & d_v z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} d_u z & d_u x \\ d_v z & d_v x \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} d_u x & d_u y \\ d_v x & d_v y \end{vmatrix}^2}$$
$$= du\,dv \sqrt{\left[\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right]^2}.$$

En remplaçant, dans cette expression, x, y, z par leurs valeurs en u, v tirées des trois équations (1), on aura une fonction de ces deux variables, que l'on intégrera entre des limites dépendantes de la forme du contour de l'aire à évaluer ([1]).

Considérons maintenant un volume. On le décomposera en parallélépipèdes infinitésimaux compris entre deux surfaces f_1 correspondantes à u et $u + du$, entre deux sufaces f_2 correspondantes à v et $v + dv$, et entre deux surfaces f_3 correspondantes à w et $w + dw$. Les coordonnées des trois sommets d'un tel parallélépipède contigus au sommet (x, y, z) seront x, y, z augmentées de leurs différentielles partielles respectives par rapport soit à u, soit à v, soit à w. Donc le volume du parallélépipède sera [127]

$$\begin{vmatrix} d_u x & d_u y & d_u z \\ d_v x & d_v y & d_v z \\ d_w x & d_w y & d_w z \end{vmatrix} = du\,dv\,dw \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}.$$

On obtiendra le volume total en intégrant cette expression par rapport aux trois variables indépendantes u, v, w, entre des limites qui seront déterminées par la forme de la surface qui borne le volume cherché.

([1]) *Voir* la formule (4) du n° 720.

Cette expression n'est autre que celle que l'on aurait obtenue directement par l'application de la formule du n° 476 à l'expression $dxdydz$ de l'élément de volume en coordonnées rectangulaires.

§ IV.

DÉTERMINATION DES CENTRES DE GRAVITÉ ET DES MOMENTS D'INERTIE.

761. *Masse d'un corps.* — Pour les corps homogènes, le calcul de leur masse se ramène immédiatement au calcul de leur étendue, linéaire, superficielle ou solide.

Si un corps est hétérogène, on le décomposera en éléments infiniment petits, tels que, dans l'étendue de chacun d'eux, la densité varie infiniment peu. En multipliant l'étendue dV de chaque élément par la densité ρ en un quelconque de ses points, on obtiendra la masse dm de cet élément, à une fraction près d'elle-même infiniment petite. On cherchera alors, par l'intégration, la limite de la somme de ces éléments dm.

Ainsi, pour une ligne hétérogène, la densité ρ est fonction de la variable indépendante dont dépendent les coordonnées de chaque point de la courbe. La masse de l'élément d'arc ds étant ρds, à un infiniment petit près du second ordre, on aura, pour expression de la masse de la ligne, l'intégrale $\int \rho ds$, prise entre des limites correspondantes aux extrémités de la ligne.

De même, si une surface plane est composée de tranches homogènes, parallèles à l'axe des y, la masse d'une tranche sera $\rho y dx$, et la masse totale $\int \rho y\, dx$, ρ étant donné en fonction de x.

Si une sphère est composée de couches concentriques homogènes, le volume d'une couche infiniment mince de rayon r étant $d\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = 4\pi r^2 dr$, sa masse sera $4\pi\rho r^2 dr$, et la masse totale $4\pi \int \rho r^2 dr$, ρ étant donné en fonction de r.

Dans une surface hétérogène, la densité est fonction des coordonnées de chaque point. On décomposera alors la surface en éléments infiniment petits du second ordre dS, et l'on obtiendra la masse de la surface en intégrant ρdS par rapport à chacune des deux variables. Ainsi la masse d'une aire plane sera

$$\int\int \rho dx dy = \int\int \rho r dr d\varphi.$$

De même, celle d'un volume composé de filets homogènes parallèles à l'axe des z sera $\int\int \rho z\,dx\,dy$.

Enfin, s'il s'agit d'un solide dont la densité varie avec les trois coordonnées, on le décomposera en éléments de volume infiniment petits du troisième ordre, que l'on multipliera par la valeur correspondante de ρ; puis on obtiendra la masse totale par une triple intégration. Ainsi, si les coordonnées sont rectangulaires, la masse aura pour expression

$$\int\int\int \rho\,dx\,dy\,dz.$$

Si l'on emploie les coordonnées polaires [757], cette expression deviendra

$$\int\int\int \rho r^2 \cos q\,dr\,dp\,dq.$$

Si l'on emploie des coordonnées curvilignes quelconques, on aura la masse en multipliant par ρ, sous le signe de triple intégration, l'élément de volume donné au n° 760.

762. *Moments et centres de gravité.* — On appelle *moment* d'un point matériel par rapport à un axe ou à un plan le produit de la masse de ce point par sa distance à cet axe ou à ce plan, cette distance étant comptée positivement dans un sens, négativement dans l'autre.

Le moment d'un système plan par rapport à un axe tracé dans le plan est la somme algébrique des moments des points du système par rapport à cet axe. De même, le moment d'un système solide par rapport à un plan est la somme des moments des points du système par rapport à ce plan.

Le *centre de gravité* d'un système plan (ou solide) est un point tel, que le moment du système par rapport à tout axe (ou à tout plan) passant par ce point est nul. Le moment du système par rapport à un axe (ou à un plan) quelconque est égal à celui d'un point de masse égale à la masse du système, et situé au centre de gravité.

Si x est la distance d'un point de masse m à un axe (ou à un plan), mx sera le moment du point par rapport à l'axe (ou au plan), et Σmx sera le moment du système total par rapport au même axe (ou au même plan).

Si l'on désigne par ξ la distance du centre de gravité du système

au même axe (ou au même plan) et par Σm la masse totale du système, on devra donc avoir

$$\Sigma m x = \xi \Sigma m,$$

équation qui fera connaître ξ.

En considérant les moments d'un système par rapport à trois plans rectangulaires entre eux, on aura donc, pour les coordonnées ξ, η, ζ du centre de gravité, les expressions

$$\xi = \frac{\Sigma m x}{\Sigma m}, \quad \eta = \frac{\Sigma m y}{\Sigma m}, \quad \zeta = \frac{\Sigma m z}{\Sigma m}.$$

Si le système est continu, on prendra pour les points matériels m les éléments infiniment petits dm de la masse du système, et les sommes des moments de ces éléments se calculeront, comme la masse totale, au moyen d'intégrations.

Lorsqu'un système est homogène, la densité constante entre en facteur commun dans toutes les sommations, et disparaît, par conséquent, des valeurs de ξ, η, ζ. On peut donc, dans le cas de l'homogénéité, remplacer partout les masses par les volumes.

Si un système homogène est symétrique par rapport à un plan (ou à un axe), son moment par rapport à ce plan (ou à cet axe) est nul. Donc ce plan (ou axe) de symétrie contient le centre de gravité.

Si un système homogène a un centre de figure, le centre de gravité coïncide avec ce centre de figure.

763. Dans un système linéaire, l'élément de masse a pour expression ρds [761]. Donc les moments par rapport aux trois plans coordonnés sont $\int \rho x ds$, $\int \rho y ds$, $\int \rho z ds$, et les coordonnées du centre de gravité sont

$$\xi = \frac{\int \rho x ds}{\int \rho ds}, \quad \eta = \frac{\int \rho y ds}{\int \rho ds}, \quad \zeta = \frac{\int \rho z ds}{\int \rho ds}.$$

Si le système forme une courbe plane, située dans le plan des xy, tous les z sont nuls, et par suite $\zeta = 0$.

Exemple. — Considérons un arc de cercle homogène, et prenons pour axe des x le diamètre bissecteur. A cause de la symétrie, le moment par rapport à cet axe sera nul, et par suite on aura $\eta = 0$.

De l'équation du cercle $x^2+y^2=a^2$ on tire

$$ds=\frac{a\,dy}{\sqrt{a^2-y^2}}=\frac{a}{x}dy,\quad \text{d'où}\quad x\,ds=a\,dy,$$

et par suite le moment de l'arc par rapport à l'axe des x sera

$$\int_{-y}^{y}x\,ds=\int_{-y}^{y}a\,dy=2ay.$$

D'ailleurs la longueur de l'arc est

$$\int_{-y}^{y}\frac{a\,dy}{\sqrt{a^2-y^2}}=2a\arc\sin\frac{y}{a}.$$

On a donc, pour l'abscisse du centre de gravité de l'arc,

$$\xi=\frac{y}{\arc\sin\frac{y}{a}}=\frac{2a^2\sin\frac{s}{2a}}{s}=\frac{ac}{s},$$

en désignant par c la longueur de la corde de l'arc s.

764. Soit maintenant une aire plane homogène ou décomposable en tranches homogènes parallèlement à l'axe des y. La masse d'une tranche étant $\rho y\,dx$, son moment par rapport à l'axe des y sera $\rho xy\,dx$, et par suite le moment de l'aire totale sera

$$\int\rho xy\,dx=\xi\int\rho y\,dx,$$

d'où l'on tirera l'abscisse ξ du centre de gravité. Si l'aire est homogène, on aura simplement

$$\xi=\frac{\int xy\,dx}{\int y\,dx}.$$

Pour avoir le moment de l'aire par rapport à l'axe des x, remarquons que le moment du rectangle infinitésimal $\rho y\,dx$ est égal à sa masse multipliée par l'ordonnée de son centre de gravité. Ce centre, coïncidant avec le centre de figure du rectangle, a pour ordonnée $\frac{1}{2}y$. On en conclut que le moment de l'aire totale par

rapport à l'axe des x est

$$\frac{1}{2}\int \rho y^2 dx = \eta \int \rho y\, dx,$$

d'où l'on tire η. Si l'aire est homogène,

$$\eta = \frac{\frac{1}{2}\int y^2 dx}{\int y\, dx}.$$

Exemples. — I. Soit un segment de la parabole $y^2 = 2ax$, compris entre la courbe et l'axe des x. En désignant par λ l'aire du segment, on a

$$\lambda = \int_0^x y\, dx = \frac{1}{a}\int_0^y y^2 dy = \frac{y^3}{3a} = \frac{2}{3}xy,$$

$$\lambda\xi = \int_0^x xy\, dx = \frac{1}{2a}\int_0^y y^4 dy = \frac{y^5}{10a} = \frac{2}{5}x^2 y,$$

$$\lambda\eta = \frac{1}{2}\int_0^x y^2 dx = \int_0^x ax\, dx = \frac{ax^2}{2},$$

d'où l'on tire

$$\xi = \frac{3}{5}x, \quad \eta = \frac{3}{4}\frac{ax}{y} = \frac{3}{8}y.$$

II. Cherchons le centre de gravité d'un secteur circulaire homogène. Il se trouve d'abord sur le diamètre bissecteur. Si l'on partage ensuite le secteur donné en secteurs ou triangles infiniment petits, le centre de gravité de chacun de ceux-ci se trouvera aux $\frac{2}{3}$ de la distance du centre à la circonférence, de sorte que le lieu de ces centres de gravité élémentaires sera l'arc concentrique à l'arc du secteur donné, et décrit avec un rayon égal aux $\frac{2}{3}$ du rayon donné. On est donc ramené à la recherche du centre de gravité d'un arc, problème résolu dans le numéro précédent.

765. *Théorèmes de Guldin.* — I. Nous avons vu que l'intégrale $\int y\, ds$ représente le moment d'un arc de courbe par rapport à l'axe des x, moment qui est égal au produit $s\eta$ de la longueur de l'arc par l'ordonnée de son centre de gravité. D'autre part, l'aire de la surface de révolution décrite par l'arc s tournant autour de l'axe

des x a pour valeur $2\pi\int y\,ds$ [754]. Donc la valeur de cette aire peut aussi se mettre sous la forme $2\pi\eta.s$, c'est-à-dire que l'aire de révolution engendrée par l'arc s est égale à la longueur de cet arc, multipliée par la circonférence décrite par son centre de gravité.

Si, au lieu d'une révolution entière, le plan de la courbe ne décrit qu'une fraction de tour autour de l'axe situé dans ce plan, l'aire de la surface et le chemin parcouru par le centre de gravité décroîtront dans le même rapport. Donc l'aire de la portion de surface décrite sera toujours égale à l'arc de méridien, multiplié par le chemin décrit par le centre de gravité de cet arc.

Ce théorème permet de calculer l'aire de la surface de révolution, connaissant le centre de gravité de la courbe, et, réciproquement, de trouver le centre de gravité de l'arc de courbe, connaissant l'aire de la surface engendrée.

Exemples. — 1° Soient a le rayon d'un cercle, b la distance de son centre à un axe situé dans son plan. La longueur de l'arc de cercle est $2\pi a$; la circonférence décrite par son centre de gravité dans la révolution du cercle autour de l'axe est $2\pi b$. Donc l'aire du tore engendré a pour valeur

$$2\pi a . 2\pi b = 4\pi^2 ab.$$

2° Si l'on fait tourner un arc de cercle autour d'un diamètre parallèle à sa corde c, a étant le rayon, l'aire de la zone engendrée sera $2\pi ac$. En l'égalant au produit de l'arc s par la circonférence $2\pi\eta$ décrite par son centre de gravité, on retrouvera la valeur $\eta = \frac{ac}{s}$, obtenue au n° 763.

766. II. Le moment d'une aire plane λ par rapport à l'axe des x est $\lambda\eta = \frac{1}{2}\int y^2\,dx$. D'autre part, le volume engendré par la révolution de l'aire λ autour du même axe est $V = \pi\int y^2\,dx$. Donc

$$V = 2\pi\eta.\lambda,$$

c'est-à-dire que le volume est égal à l'aire génératrice multipliée par le chemin décrit par le centre de gravité de cette aire.

Cet énoncé subsisterait encore si, au lieu d'une révolution en-

tière, l'aire génératrice n'avait accompli qu'une fraction de révolution.

Exemples. — 1° En appelant a le rayon d'un cercle, b la distance du centre du cercle à l'axe de révolution, on a, pour le volume du tore engendré,

$$\pi a^2 . 2\pi b = 2\pi^2 a^2 b.$$

2° Si l'on fait tourner un secteur circulaire de rayon a autour d'un diamètre parallèle à la corde c, le volume du secteur sphérique engendré sera $2\pi a . c . \frac{1}{3} a = \frac{2}{3}\pi a^2 c$. L'aire du secteur est $\frac{1}{2} as$, s étant la longueur de l'arc. Donc, η étant la distance du centre de gravité du secteur circulaire au centre du cercle, on a

$$\frac{2}{3}\pi a^2 c = 2\pi\eta . \frac{1}{2} as, \quad \text{d'où} \quad \eta = \frac{2}{3}\frac{ac}{s},$$

comme nous l'avions trouvé par une autre voie [764].

767. *Volume du cylindre tronqué.* — Considérons un cylindre parallèle à l'axe des z, et qui ait pour section droite une aire λ tracée sur le plan des xy. Considérons une section plane quelconque, faisant avec la section droite un angle α. L'élément de cette section, qui a pour projection $d\lambda$ sur le plan des xy, aura pour grandeur dans l'espace $d\lambda \operatorname{séc}\alpha$. Le moment de la section par rapport au plan des zx sera donc $\int y . d\lambda \operatorname{séc}\alpha$. D'ailleurs, l'aire totale de la section est $\lambda \operatorname{séc}\alpha$; donc on aura

$$\eta . \lambda \operatorname{séc}\alpha = \int y\, d\lambda \operatorname{séc}\alpha, \quad \text{ou} \quad \eta = \frac{\int y\, d\lambda}{\lambda},$$

valeur indépendante de α. Il en serait de même pour la valeur de ξ. Donc le lieu des centres de gravité de toutes les sections planes d'un cylindre est une droite parallèle aux génératrices.

Cela posé, cherchons le volume compris entre la section droite et une section oblique quelconque λ'. Prenons le plan des xz perpendiculaire au plan de λ', et par suite l'axe des y parallèle à ce plan. Si l'on décompose λ' en éléments rectangulaires infiniment petits du premier ordre, parallèles à l'axe des y, et se projetant

sur le plan des xy suivant des rectangles $d\lambda$, le volume sera donné par l'intégrale $\int z\,d\lambda$. Or le moment de la section λ' par rapport au plan des xy est $\int z\,d\lambda'$ ou $\int z\,d\lambda \operatorname{séc}\alpha = \lambda'\zeta = \zeta\lambda \operatorname{séc}\alpha$, ζ étant l'ordonnée du centre de gravité de cette section. Donc

$$\int z\,d\lambda = \zeta\lambda = \text{le volume du cylindre tronqué.}$$

Donc ce volume est égal au produit de la section droite par la distance des centres de gravité des deux bases. On étendrait immédiatement cette proposition au cas où les deux bases seraient des sections quelconques.

On voit que le volume d'un cylindre n'est pas altéré lorsque l'on fait tourner d'une manière quelconque une de ses bases autour du centre de gravité de cette base.

768. Si l'on considère maintenant un corps solide quelconque, la masse de l'élément de volume étant $\rho\,dx\,dy\,dz$, les coordonnées du centre de gravité seront données par les équations

$$M\xi = \int\!\!\int\!\!\int \rho x\,dx\,dy\,dz, \quad M\eta = \int\!\!\int\!\!\int \rho y\,dx\,dy\,dz, \quad M\zeta = \int\!\!\int\!\!\int \rho z\,dx\,dy\,dz,$$

M étant la masse totale du corps.

Si le corps est homogène, V étant son volume, on aura $M = V\rho$, et la constante ρ disparaîtra des équations précédentes. On pourra, dans ce cas, effectuer immédiatement l'intégration par rapport à l'une des trois variables, à z par exemple, et l'on aura, z et Z étant les ordonnées de la surface inférieure et de la surface supérieure du corps,

$$V\xi = \int\!\!\int x(Z - z)\,dx\,dy, \quad V\eta = \int\!\!\int y(Z - z)\,dx\,dy,$$

$$V\zeta = \frac{1}{2}\int\!\!\int (Z^2 - z^2)\,dx\,dy.$$

769. *Moments d'inertie.* — On appelle *moment d'inertie* d'un point matériel m, par rapport à un plan, à un axe ou à un point, le produit de la masse de ce point m par le carré de sa distance au plan, à l'axe ou au point. Le moment d'inertie d'un système est la somme des moments d'inertie des points matériels qui le composent.

Si l'on rapporte les points à trois axes rectangulaires, les mo-

ments d'inertie d'un point m par rapport aux plans des yz, des zx et des xy seront mx^2, my^2, mz^2, et par suite les moments d'inertie du système total par rapport à ces mêmes plans seront

$$\mathrm{a} = \Sigma mx^2, \quad \mathrm{b} = \Sigma my^2, \quad \mathrm{c} = \Sigma mz^2.$$

Le moment d'inertie de m par rapport à l'axe des x est

$$m(y^2 + z^2) = my^2 + mz^2.$$

Donc, le moment d'inertie du système par rapport à cet axe sera

$$\Sigma my^2 + \Sigma mz^2 = \mathrm{b} + \mathrm{c},$$

et de même pour les autres. On aura donc, pour les moments d'inertie du corps par rapport aux trois axes coordonnés,

$$\mathrm{A} = \mathrm{b} + \mathrm{c}, \quad \mathrm{B} = \mathrm{c} + \mathrm{a}, \quad \mathrm{C} = \mathrm{a} + \mathrm{b}.$$

De même, le moment d'inertie du système par rapport à l'origine des coordonnées sera

$$\mathrm{a} + \mathrm{b} + \mathrm{c} = \frac{1}{2}(\mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C}).$$

Si le système est continu, les sommations se changent en intégrales.

770. On traitera les divers cas qui peuvent se présenter dans la détermination des moments d'inertie comme nous avons traité les cas analogues dans la détermination des centres de gravité.

Ainsi, pour le cas d'un système plan, on a

$$\mathrm{a} = \int x^2 dm, \quad \mathrm{b} = \int y^2 dm, \quad \mathrm{c} = 0,$$

d'où

$$\mathrm{A} = \mathrm{b}, \quad \mathrm{B} = \mathrm{a}, \quad \mathrm{C} = \mathrm{a} + \mathrm{b} = \int (x^2 + y^2)\, dm.$$

Si l'on cherche les moments d'inertie d'une sphère homogène, on a

$$\int x^2 dm = \int y^2 dm = \int z^2 dm = \frac{1}{3}\int (x^2 + y^2 + z^2)\, dm.$$

Or, en faisant $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ et supposant la densité $= 1$, l'élé-

ment dm sera une couche sphérique $4\pi r^2 dr$, d'où

$$a = b = c = \frac{4\pi}{3}\int r^4 dr = \frac{4\pi}{15} R^5 = \frac{1}{5} MR^2,$$

M étant la masse de la sphère, R son rayon. On aura donc

$$A = B = C = 2a = \frac{2}{5} MR^2.$$

Pour un cercle homogène,

$$a = b = \frac{1}{2}\int (x^2 + y^2)\, dm = \frac{1}{2}\int r^2 . 2\pi r dr = \frac{\pi}{4} R^4 = \frac{1}{4} MR^2,$$

d'où

$$A = B = \frac{1}{2} C = \frac{1}{4} MR^2.$$

Si l'on suppose une surface de révolution autour de l'axe des x, $y = f(x)$ étant l'équation de la courbe méridienne, le moment d'inertie de l'aire par rapport à l'axe de révolution sera

$$A = 2\pi \int y^3 ds.$$

Par rapport à un plan mené par l'origine perpendiculairement à cet axe, le moment d'inertie sera

$$a = 2\pi \int x^2 y\, ds.$$

Le moment d'inertie par rapport à un axe quelconque mené dans ce plan par l'origine sera, à cause de $A = 2b = 2c$,

$$B = c + a = 2\pi \int \left(\frac{1}{2} y^2 + x^2\right) y\, ds.$$

Les quantités analogues pour le volume de révolution seront

$$A = \frac{\pi}{4}\int y^4 dx, \quad a = \pi \int x^2 y^2 dx, \quad B = \pi \int \left(\frac{1}{8} y^2 + x^2\right) dx.$$

771. Pour un corps solide quelconque, on a

$$a = \iiint \rho x^2 dx dy dz, \quad b = \iiint \rho y^2 dx dy dz, \quad c = \iiint \rho z^2 dx dy dz.$$

d'où l'on tire A, B, C.

Le calcul des axes principaux d'inertie exige encore la détermi-

nation des intégrales

$$D = \Sigma yz\,dm, \quad E = \Sigma zx\,dm, \quad F = \Sigma xy\,dm,$$

c'est-à-dire

$$D = \iiint \rho yz\,dx\,dy\,dz, \quad E = \iiint \rho zx\,dx\,dy\,dz, \quad F = \iiint \rho xy\,dx\,dy\,dz.$$

Si le corps est homogène, on pourra, dans toutes ces expressions, effectuer immédiatement l'intégration par rapport à l'une des trois variables, à z par exemple.

Exemple. — Déterminer les axes principaux d'inertie d'un parallélépipède rectangle fixé par un de ses sommets et supposé homogène.

En prenant pour axes coordonnés les directions des trois arêtes α, β, γ, et nommant M la masse $\rho\alpha\beta\gamma$, on trouve aisément

$$a = \frac{1}{3}M\alpha^2, \quad b = \frac{1}{3}M\beta^2, \quad c = \frac{1}{3}M\gamma^2,$$

$$D = \frac{1}{4}M\beta\gamma, \quad E = \frac{1}{4}M\gamma\alpha, \quad F = \frac{1}{4}M\alpha\beta.$$

L'équation de l'ellipsoïde central d'inertie sera donc

$$\frac{\beta^2+\gamma^2}{3}x^2 + \frac{\gamma^2+\alpha^2}{3}y^2 + \frac{\alpha^2+\beta^2}{3}z^2 - \frac{\beta\gamma}{2}yz - \frac{\gamma\alpha}{2}zx - \frac{\alpha\beta}{2}xy = 1,$$

et la détermination de ses axes principaux dépendra de l'équation du troisième degré

$$s^3 - \lambda s^2 - \mu s - \nu = 0,$$

où l'on a posé

$$\lambda = \frac{2}{3}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2),$$

$$\mu = \frac{1}{9}[(\alpha^2+\beta^2)(\alpha^2+\gamma^2) + (\beta^2+\gamma^2)(\beta^2+\alpha^2) + (\gamma^2+\alpha^2)(\gamma^2+\beta^2)]$$
$$- \frac{1}{16}(\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2+\alpha^2\beta^2),$$

$$\nu = \frac{1}{27}(\beta^2+\gamma^2)(\gamma^2+\alpha^2)(\alpha^2+\beta^2)$$
$$- \frac{1}{48}[\beta^2\gamma^2(\beta^2+\gamma^2)+\gamma^2\alpha^2(\gamma^2+\alpha^2)+\alpha^2\beta^2(\alpha^2+\beta^2)] - \frac{1}{32}\alpha^2\beta^2\gamma^2.$$

EXERCICES.

I.

1. Appliquer les théories exposées dans le Chapitre Ier à l'étude des courbes représentées par les équations suivantes :

(1) $(a-x)y^2 = x^3$. (Cissoïde.)

(2) $x^2y^2 = (y+a)^2(b^2-y^2)$, ou $r = \frac{a}{\sin p} \pm b$. (Conchoïde.)

(3) $r = a + b\cos p$. (Conchoïde du cercle.)

(4) $r = a(1+\cos p)$. (Cardioïde.)

(5) $xy^2 = a^2(a-x)$. (Courbe d'Agnesi.)

(6) $y^2 = x^2 - x^4$. (Lemniscate.)

(7) $(a+x)y^2 = (a-x)x^2$. (Strophoïde.)

(8) $Rr = a^2$. (*Voir* n° 520. Ovales de Cassini.) — Cas où $Aa = 2a$.

(9) $R + nr = 2a$. (Ovales de Descartes.)

(10) $\left(\frac{x}{a} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right)^2 = n^2\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)$, ou $x = a\cos t(n + \cos t)$, $y = b\sin t$.

(11) $y = x^2 - x^4$.

(12) $y^2 = x^3 - x$.

(13) $y^2 = x^3 - x^4$.

(14) $xy^2 - x^2y = 1$.

(15) $y^4 - 2x^2y^2 - x^4 + 1 = 0$.

(16) $(y - x^2)^2 = x^5$.

(17) $y^2 = x^2\frac{3a - 4x}{a - 4x}$.

(18) $y^4 = x^4 + a^2x^2 - b^4$.

(19) $x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{3}{2}}$.

(20) $2y^5 - 10xy^3 + 15x^3 = 0$.

(21) $r^2p = a^2$. (Lituus.)

(22) $r = a\sin np \left(n = 2, 3, 4, \ldots, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{3}{5}, \ldots\right)$.

(23) Épicycloïdes et hypocycloïdes, pour diverses valeurs du rapport des rayons des cercles.

(24) $r = \frac{1-p}{1+2p}$.

(25) $r = \frac{1}{\sqrt{1-p}}$.

(26) $r = \sqrt{1 - p}$.

(27) $r = \dfrac{\sin p}{p}$.

(28) $r = \dfrac{a^2 \cos p}{a + b \cos p}$.

(29) $r^2 - 2r\cos p + 2\sin p = 0$.

(30) $r = a + b \operatorname{tang} p$.

(31) $y = x \log x$.

(32) $x^y = a$.

(33) $y = x^x$.

(34) $y = \log \log x$.

(35) $y = a \sin \dfrac{\pi x}{2a}$. (Quadratrice de Tschirnhaus.)

(36) $y = x \cot \dfrac{\pi x}{2a}$, ou $r \cos p = ap$. (Quadratrice de Dinostrate.)

(37) $r = a \cos^2 p \sin p$, ou $x = \dfrac{t}{a}\sqrt{at - t^2}$, $y = \dfrac{at - t^2}{a}$.

(38) $r = p \cos p$.

(39) $y = a \sin \dfrac{b}{x}$.

(40) $y^n = \cos \dfrac{y}{x}$, $(n = 1, 2, \ldots)$.

(41) $y = a \dfrac{\sin x}{x}$.

(42) $y^3 + x^3 \cos \dfrac{y}{x} = 0$.

(43) $r = a(\sin p + \operatorname{tang} p + \operatorname{séc} p)$.

(44) $r = a(1 \pm \operatorname{corde} p)$.

(45) $r = \log \sin p$.

(46) $y = \operatorname{tang} x$.

(47) $r = \dfrac{a}{\sin t}$, $p = \operatorname{tang} t - t$. (Développante du cercle.)

(48) $xy^4 - ay^4 + x^2y^3 - b^5 = 0$.

(49) $(y^2 - a^2)^3 - x^4(2x + 3a)^2 = 0$.

(50) $y = a \operatorname{Ch} \dfrac{x}{a}$. (Chaînette.)

(51) $y = \dfrac{a}{\operatorname{Ch} t}$; $x = a(t - \operatorname{Th} t)$. (Tractoire.)

(52) $r = a \cos t$, $p = \operatorname{tang} t - t$.

2. Asymptotes et points singuliers des courbes :

(1) $y = 2x \pm (x-1)\sqrt{\dfrac{x+2}{x(4-x)}}$.

(2) $(y^2 - 3xy + 2x^2)x - 4ay^2 = 0$.

(3) $x(y+x)^2(y-2x) = a^4$.

(4) $(x^2+y^2)(y-x)^2 = x^2$.

(5) $ax^4 + c^3xy - by^4 = 0$.

(6) $r = \operatorname{tang} 2p$.

3. OA étant un rayon fixe d'un cercle, OB un rayon mobile, on prend sur chacune des positions de OB une longueur OM = la corde AB. Lieu du point M.

4. Par les extrémités A, B de la droite AB, on fait passer un cercle quelconque; on prend sur AB, à partir de son milieu O, une longueur OP, qui soit dans un rapport constant avec le rayon du cercle, et en P on mène PM perpendiculaire à AB et rencontrant le cercle en M. Lieu du point M.

5. Par l'extrémité A d'un diamètre fixe AB d'un cercle donné, on mène une corde quelconque AC, puis par le point C une droite CM égale à AC et parallèle à AB. Lieu du point M.

6. On a deux tiges articulées AB, BC, de longueurs constantes a, b, dont la première tourne autour de son extrémité fixe A, tandis que l'extrémité C de l'autre glisse le long d'une droite fixe ACx. Lieu décrit par un point M pris sur la droite CB, à une distance CM = c du point C.

7. On donne la droite AB et deux points C, D hors de cette droite. On joint C et D à un point variable P de AB, et par P on mène PM perpendiculaire à AB et = CP ± DP. Lieu du point M.

8. Podaire de la parabole par rapport à un point de l'axe ou de la directrice.

9. Lieu des pieds des normales menées d'un point fixe à toutes les paraboles de même axe et de même sommet.

10. Lieux des projections du pôle de la spirale d'Archimède sur les tangentes et sur les normales à cette courbe.

11. Tangente commune aux deux courbes

$$y^2 - ax = 0, \quad by^2 + x^3 = 0.$$

12. Lieux des extrémités de la sous-tangente et de la sous-normale polaires pour le cercle ($r = a\cos p$), la spirale d'Archimède, la spirale hyperbolique, le lituus ($r^2 p = a$), et généralement pour la spirale $r = ap^n$, la cardioïde $r = a(1+\cos p)$, la conchoïde.

13. Exprimer en coordonnées polaires la sous-tangente, la sous-normale, la tangente, la normale, définies pour le système des coordonnées rectangulaires. — Réciproquement, exprimer, en coordonnées rectangulaires, la sous-tangente, la sous-normale, etc., définies pour le système des coordonnées polaires.

14. Trouver les points d'inflexion d'une courbe rapportée à des coordonnées polaires, en cherchant le maximum ou le minimum de l'angle

$$\tau = p + \theta \quad [516].$$

15. Points d'inflexion des courbes suivantes : 1° conchoïde; 2° lituus; 3° $y = \frac{x^2 - a^2}{\sqrt{2x^2 - a^2}}$; 4° $y^4 = x^4 + a^2x^2 - b^4$. Examiner, pour cette dernière, le cas de $b = 0$.

16. Rayon de courbure de la courbe (épicycloïde) représentée par les équations

$$x = (a + b)\sin\frac{t}{a} - b\sin\left(\frac{t}{a} + \frac{t}{b}\right),$$

$$y = (a + b)\cos\frac{t}{a} - b\cos\left(\frac{t}{a} + \frac{t}{b}\right).$$

Déduire de là les rayons de courbure de la cycloïde et de la développante du cercle.

17. Démontrer que, dans la parabole, le rayon de courbure en un point quelconque est double de la portion de la normale en ce point comprise entre la courbe et la directrice.

18. Dans la cycloïde, la somme des carrés du rayon de courbure en un point et de l'arc compris entre ce point et le sommet de la courbe est constante. — Étendre cette propriété aux épicycloïdes.

19. Développées des courbes suivantes :

(1) Lemniscate, $r^2 = a^2 \cos 2p$.
(2) Cissoïde.
(3) Logarithmique, $y = a^{nx}$.
(4) Cycloïde.
(5) Épicycloïde, hypocycloïde.
(6) Cycloïde allongée ou raccourcie.
(7) $y^m = x$.
(8) $r^m = ap$.
(9) Chaînette.
(10) Tractoire.
(11) Spirale logarithmique.
(12) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.
(13) $xy = a^2$, en coordonnées obliques.

20. Développantes des courbes suivantes :

(1) $y^2 = ax$.
(2) $y^2 = ax^3$.

(3) $x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{3}{2}}$, en commençant le développement à partir du point pour lequel $x = y$.

(4) Cycloïde, à partir du point de rebroussement.

(5) Épicycloïde.

21. Courbes parallèles à l'ellipse, à la courbe (3) de l'exercice précédent.

22. Trouver, par l'analyse ordinaire, les développées *imparfaites* pour les exemples du n° 615.

23. Lieu du sommet d'un angle dont un côté passe par le centre d'un cercle, tandis que l'autre est tangent à la développante du cercle.

24. Enveloppe de la perpendiculaire à l'extrémité du rayon vecteur d'une courbe donnée. Calculer la distance des points correspondants des deux courbes. — Application à la courbe $y^2 = ax$. — Quelle est la courbe pour laquelle l'abscisse d'un point de l'enveloppe varie proportionnellement à celle du point correspondant de la courbe?

25. Enveloppe des cercles ayant pour diamètres les cordes d'un cercle donné menées d'un même point de ce cercle. — Enveloppe des cercles ayant pour diamètres les cordes de la premiere enveloppe partant du même point. — On cherchera de même l'enveloppe des cercles décrits sur les cordes de la seconde enveloppe, et ainsi de suite. Si l'on continue indéfiniment cette opération, quelle sera la limite de cette série d'enveloppes?

26. Lieu des centres et enveloppe des cercles qui interceptent des longueurs constantes sur un cercle donné et sur une droite donnée.

27. Enveloppe de la droite qui joint un point d'une cycloïde au centre correspondant du cercle générateur.

28. Enveloppe d'une corde qui retranche de la parabole $y^2 = ax$ un segment d'aire constante.

29. Enveloppe de la droite

$$x \cos 3\alpha + y \sin 3\alpha = a (\cos 2\alpha)^{\frac{3}{2}},$$

α étant un paramètre variable.

30. Enveloppe d'une droite de longueur constante, s'appuyant, par ses extrémités, sur deux courbes données. — Cas où ces deux courbes deviennent deux droites non situées dans le même plan.

31. Enveloppe d'un cercle de rayon donné, dont le centre se meut sur une courbe donnée.

32. Discuter l'application de la règle pour trouver l'enveloppe, dans le cas de la courbe donnée par l'équation $Cy - e^{\sqrt{x-a}} = 0$.

33. Enveloppe d'un cercle passant par un point fixe, tandis que son centre se meut sur une courbe donnée. — *Exemples :* La courbe donnée est 1° une ellipse, 2° une spirale logarithmique.

34. Enveloppe de la courbe $\left(\frac{x}{\alpha}\right)^m + \left(\frac{y}{\beta}\right)^m = 1$, les paramètres α, β étant assujettis à la condition $\left(\frac{\alpha}{a}\right)^n + \left(\frac{\beta}{b}\right)^n = 1$.

35. Enveloppe et équation différentielle des courbes représentées par l'équation $y = \alpha \operatorname{Ch} \frac{x}{\alpha}$, α étant un paramètre variable. — Enveloppes des courbes

(1) $(x^2 + y^2 - a^2)(y^2 - 2Cy) + C^2(x^2 - a^2) = 0$,

(2) $y = Ce^{\frac{x}{C}}$,

C étant un paramètre variable.

36. Points singuliers des courbes suivantes :

(1) $(y - x^2)^2 = x^8$.
(2) $y = b \pm (x - a)\sqrt{x - c}$.
(3) $y = x\sqrt{x + c}$.
(4) $y^2 = x^3 + (b - c)x^2 + bcx$.
(5) $y = b + c(x - a)^m$.
  $\left(\text{Ex. : } m = 9 \text{ et } = \frac{9}{5}\cdot\right)$
(6) $(y - x - x^2)^2 = x^5$.
(7) Cissoïde.
(8) $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.
(9) $(a^2x^2 + b^2y^2 - c^4)^3 + 27a^2b^2c^4x^2y^2 = 0$, $c^2 = a^2 - b^2$. (Développée de l'ellipse.)
(10) Développée de l'hyperbole. (Changer, dans l'exemple ci-dessus, b en bi.)
(11) $4096a^3x + 1152a^2y^2 + 27y^4 = 0$. (Développée de la cissoïde.)

37. Radiales. — Si l'on nomme *radiale* d'une courbe donnée la courbe dont le rayon vecteur est égal et parallèle au rayon de courbure de la courbe donnée, déterminer les radiales des courbes suivantes :

(1) Cycloïde.
(2) Courbes du second degré.
(3) Logarithmique.
(4) $y^2 = ax^3$.
(5) Lemniscate.
(6) Cardioïde.
(7) $xy^2 = a^3$.
(8) $x = ae^{1+\frac{1}{x}}$.
(9) $y^m = a^{m-1}x$.
(10) $x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{3}{2}}$.
(11) $e^{\frac{2y}{a}} = \operatorname{Th} \frac{x}{a}\cdot$
(12) $x + y = a \operatorname{tang} \frac{x}{c}\cdot$
(13) $x + y = a \log \frac{x}{c}\cdot$
(14) $x + y = ae^{\frac{x}{c}}$.
(15) $x + y = a \operatorname{Ch} \frac{x}{c}\cdot$
(16) $y = e^{\operatorname{tang} x}$.
(17) $y = c^{\frac{x-y}{y}}$.
(18) $\sin \frac{y}{a} = \frac{x}{a}\cdot$
(19) $\operatorname{tang} \frac{y}{a} = \frac{x}{a}\cdot$

38. Trouver la courbe dont la radiale est représentée par l'une des équations suivantes, où $\varpi = \tau + \frac{\pi}{2}$ est égal à l'angle du rayon de courbure avec l'axe des x :

(1) $xy = a^2$.	(7) $y = a \operatorname{tang} \frac{x}{a}$.
(2) $\rho \sin^2 \varpi = 4a \cos \varpi$.	(8) $y = a \operatorname{séc} \frac{x}{a}$.
(3) $\rho \sin^3 \varpi = 2a$.	(9) $\rho = a\varpi$.
(4) $\rho = a \cot \varpi$.	(10) $\rho = e^{n\varpi}$.
(5) $\rho \cos \varpi = 2a$.	(11) $\rho = a \sin n\varpi$.
(6) $\rho \cos^2 \varpi = 2a$.	

39. Étant donnée l'équation de la radiale $\rho = \varphi(\varpi)$, on a, à cause de $\varpi = \tau + \frac{\pi}{2}$,

$$\rho = \frac{ds}{d\varpi},$$

d'où

$$\frac{ds}{d\tau} = \varphi\left(\tau + \frac{\pi}{2}\right) = f(\tau),$$

et, par suite,

$$s = \int f(\tau)\, d\tau,$$

ce qu'on appelle l'équation *intrinsèque* de la courbe. — Application 1° à la parabole, 2° à la chaînette, 3° à la parabole semi-cubique $y^2 = ax^3$.

40. Roulettes. — Une courbe C roule sans glisser sur une courbe fixe C', prise pour *base*. On donne le nom de *roulette* au lieu décrit par un point μ, invariablement lié à la courbe C.

Supposons la courbe C déterminée par une équation entre les coordonnées polaires r, p, ayant pour pôle le point décrivant μ et pour origine des angles une droite invariablement liée à C. Soient de plus, par rapport à des axes rectangulaires fixes, x, y les coordonnées du point de contact de C et de C', et ξ, η les coordonnées du point décrivant μ. Ces dernières seront déterminées par les équations

$$(1) \quad \int dS = \int_{r_0}^{r} \sqrt{dr^2 + r^2\, dp^2} = \int_{x_0}^{x} \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int ds,$$

$$(2) \quad \xi = x - r\cos(r, x), \quad \eta = y - r\cos(r, y),$$

ou, à cause de $(r, x) = \theta - \mathrm{T}$, $(r, y) = (r, x) + \frac{\pi}{2}$,

$$(2)' \quad \xi = x - r\cos(\theta - \mathrm{T}), \quad \eta = y + r\sin(\theta - \mathrm{T}),$$

θ et T étant les angles que fait la tangente commune aux deux courbes avec le rayon r et avec l'axe Ox, d'où

$$(r, x) = \theta - \mathrm{T}, \quad dp = -d(\theta - \mathrm{T}).$$

et

$$\cos\theta = \frac{dr}{dS}, \quad \sin\theta = \frac{r\,dp}{dS}, \quad \cos\mathrm{T} = \frac{dx}{ds}, \quad \sin\mathrm{T} = \frac{dy}{ds}.$$

On en tire aisément

$$d\xi \cos(\theta - T) - d\eta \sin(\theta - T) = 0.$$

Donc le rayon mené du point décrivant au point de contact des deux courbes est normal à la roulette. — C'est ce qu'on peut démontrer aisément par la Géométrie. — Détermination du rayon de courbure de la roulette.

41. Application à la cycloïde ordinaire, à la cycloïde allongée ou raccourcie, à l'épicycloïde, à l'hypocycloïde, au lieu du foyer ou du sommet d'une parabole roulant sur une tangente ou sur une parabole égale, au lieu du foyer d'une ellipse roulant sur une droite fixe, etc.

Cas général où la courbe mobile est égale à la courbe fixe. — Application à deux ellipses égales.

Cas où la courbe fixe est une ligne droite.

Roulette décrite par le centre d'un cercle entraîné par sa développante, celle-ci roulant sur une droite fixe.

Roulette décrite par le pôle d'une spirale 1° hyperbolique, 2° logarithmique, roulant sur une droite fixe.

42. Droite roulant sur une courbe. Lieu d'un point de la droite. Cas où la courbe est une parabole. — Cas où la courbe est un cercle. Lieu d'un point lié invariablement à la droite.

43. Enveloppe d'une courbe roulant sans glisser sur une courbe fixe. — Application aux exemples précédents [1].

44. Trajectoires [2]. — Trouver les trajectoires orthogonales des lignes du second ordre semblables, ayant un de leurs axes situé sur une même droite, et se coupant toutes en un même point, réel ou imaginaire.

45. Trajectoires orthogonales d'une courbe donnée qui se transporte de manière que tous ses points décrivent des droites parallèles. — *Exemples :* 1° $y = Cx^n$, 2° $y = C.\mathrm{Ch}\frac{x}{C}$ [3], mobiles l'une et l'autre parallèlement aux y; 3° cycloïde mobile parallèlement à la base.

46. Trajectoires orthogonales d'une courbe donnée, mobile dans son plan autour d'un point fixe. — *Exemples :* 1° Parabole tournant autour de son foyer; 2° spirale $r^n = C^n p$ tournant autour de l'origine.

47. Trajectoires obliquangles d'une série de courbes homothétiques. — *Exem-*

---

(1) On pourra traiter ces divers problèmes par la méthode des équipollences.

(2) *Voir* n° 616. Traiter ces questions par la méthode ordinaire et par celle des équipollences. — On posera au moins l'équation différentielle, sauf à l'intégrer plus tard.

(3) C étant le paramètre variable.

ples : 1° ellipses concentriques ; 2° paraboles de même foyer ; 3° coniques ayant un foyer commun ; 4° cercles ayant même centre de similitude.

48. Trajectoires orthogonales des courbes suivantes :

1° $y = Cx^n$; 2° $\left(\frac{x}{C}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = 1$ [Ex. : $n = 2$] ; 3° ellipses confocales ; 4° coniques circonscrites à un même rectangle.

49. Trajectoires obliquangles des courbes 1° $y = Cx$, 2° $r = Ce^{np}$, 3° $y^2 = Cx$, 4° $y^2 = 2Cx - x^2$, 5° $x^2 + y^2 = C$.

50. Trouver une trajectoire telle qu'en chacun de ses points de rencontre avec la courbe variable les longueurs des tangentes [509] aux deux courbes aient entre elles une relation donnée $\zeta \frac{d\sigma}{d\zeta} = \varphi\left(y \frac{ds}{dy}\right)$. *Exemple :* la parabole $2a(y + C) = x^2$, avec la relation $\zeta \frac{d\sigma}{d\zeta} = ny \frac{ds}{dy}$.

51. Trouver une trajectoire telle que l'angle qu'elle fait avec chaque courbe qu'elle traverse soit partagé en deux parties égales par l'ordonnée du point d'intersection. — *Exemple :* $y = Cx^n$, se transportant parallèlement à l'axe des y.

52. Équation des lignes qui coupent une série de droites parallèles sous un angle dont la tangente trigonométrique soit égale à l'abscisse du point d'intersection.

53. Caustiques. — On appelle ainsi l'enveloppe des rayons partis d'un même point lumineux et réfléchis ou réfractés par une courbe donnée, que nous supposerons située dans un même plan que les rayons.

Trouver l'équation générale des caustiques par réflexion et celle des caustiques par réfraction. Comment la première peut-elle se déduire de la seconde ? — Cas d'un point lumineux à l'infini sur l'axe des x.

54. Caustiques par réflexion : 1° d'une parabole $y^2 = 2ax$; 2° d'un cercle $x^2 + y^2 = a^2$, pour un point lumineux à l'infini sur l'axe Ox ; 3° du foyer d'une ellipse ; 4° d'un point de la circonférence d'un cercle ; 5° des rayons perpendiculaires à la base d'une cycloïde.

55. Caustique par réfraction d'une ligne droite.

56. Étant donnés deux points A, B, trouver une courbe telle qu'elle réfracte (ou réfléchisse) tous les rayons partis de A, de manière qu'ils aillent tous passer par B après la réfraction (ou la réflexion).

57. Trouver une courbe telle que l'angle θ de la tangente avec le rayon vecteur soit une fonction donnée de l'angle polaire p. — *Exemples :* $\theta = a$, p, $2p$, np.

58. Trouver une courbe telle que l'accroissement de l'angle de la tangente avec l'axe des x soit proportionnel à l'accroissement de l'abscisse.

59. Trouver la courbe pour laquelle la projection de la tangente sur le rayon vecteur est constante.

60. Trouver la courbe pour laquelle la podaire de l'origine est un cercle.

61. Trouver la courbe qui a une courbe donnée pour le lieu des extrémités de sa sous-tangente polaire $\left(\textit{Exemples}: r = \frac{a}{\cos p},\ r = \frac{a}{1 + e\cos p}\right)$ ou de sa sous-normale polaire $\left(\textit{Exemples}: r = \frac{a}{\sin p},\ r = \frac{a}{1 - \cos p}\right)$.

62. Déterminer une courbe, étant donné le lieu du milieu de la normale polaire $N = \frac{ds}{dp}$. — Cas où ce lieu est une perpendiculaire à l'axe des x.

63. Étant donnée une conique C, trouver toutes les coniques C′ qui coupent C à angles droits aux quatre points où elles la rencontrent.

II.

1. Appliquer les théories exposées dans le Chapitre II à l'étude des courbes suivantes :

(1) $x^2 + y^2 = a^2, \quad y^2 + z^2 = b^2.$

(2) $ax = y^2 + z^2, \quad by^2 = x^2 + z^2.$

(3) $b^2(a^2 - x^2) = a^2(y^2 + z^2), \quad a^2y^2 = b^2(ax - x^2).$

(4) $ax = y^2 + z^2, \quad ay = x^2.$

(5) $y^3 = x^2z, \quad xy = az.$

(6) $y^3 = x^2(z - y), \quad ay = x^2.$

(7) $ax = y^2, \quad by = z^2.$

(8) $ax = y^2, \quad z^2 + y^2 = a^2.$

(9) $x^2 - y^2 = a^2, \quad a^2y^2 = a^2z^2 - y^2z^2.$

(10) $(a - x)^2y^2 = x^3, \quad a^2 = yz.$

(11) $x^2 - a^2 = y^2, \quad y^2 - a^2 = z^2.$

2. Développer sur le plan des zx (en développant [749] le cylindre qui les projette sur l'un ou sur l'autre des deux autres plans coordonnés) les courbes représentées par les équations

(1) $ax = y^2, \ y^2 + z^2 = a^2.$

(2) $ay = z^2, \ ax^3 = z^4.$

(3) $ax = y^2, \ y^6 - 6a^2y^4 + 12a^4y^2 - 8a^6 = 9a^4z^2.$

3. Courbes décrites à l'aide d'un compas sur les surfaces suivantes :

(1) $y^2 + z^2 = a^2$.

(2) $z^2 = nxy$.

(3) Cône oblique à base circulaire.

4. On donne un point A sur l'axe des x, une courbe $f(y, z) = 0$ sur le plan des yz, et l'on prolonge toutes les droites AM menées à cette courbe d'une longueur constante. Équations du lieu des extrémités. — *Exemple :* $ay = z^2$.

5. En chaque point d'un cercle, on élève sur le plan de ce cercle une perpendiculaire égale à la sous-tangente correspondante, le cercle étant rapporté à deux diamètres rectangulaires. Lieu des extrémités de ces perpendiculaires.

6. Une génératrice d'un cône de révolution, se mouvant uniformément sur la surface, est parcourue par un point mobile suivant une loi donnée. Étudier la courbe que décrit ce point. — *Exemples :* 1° le point se meut uniformément ; 2° il a un mouvement uniformément accéléré ; 3° la courbe coupe la génératrice sous un angle constant.

7. Sur un cône de révolution de $0^m,73$ de hauteur, on enroule un fil auquel on donne la forme d'une spirale conique à spires équidistantes, le nombre de ces spires étant de 30, du sommet jusqu'à la base, et la distance entre deux spires, comptée sur la génératrice, étant de $0^m,03$. Quelle est la longueur du fil ?

8. Lieu des points de contact des tangentes menées d'un point donné sur l'axe des y à la surface $ax = y^2 + z^2$.

9. Une courbe C étant tracée sur une surface donnée, on mène la surface développable tangente à la surface donnée suivant cette courbe, puis on développe sur un plan la surface développable avec la courbe C. Soient R le rayon de courbure de la courbe C dans l'espace, ρ le rayon de courbure de cette courbe après le développement, i l'angle du plan osculateur de la courbe dans l'espace avec le plan tangent à la surface au même point : démontrer que l'on a $R = \rho \cos i$.

10. Les lignes de courbure du cône $ax^n + by^n + cz^n = 0$ sont les génératrices d'une part, et de l'autre les courbes d'intersection du cône avec des sphères décrites du sommet comme centre.

11. Un cylindre ayant pour section droite la courbe $f(x, y) = 0$, une courbe donnée se meut de manière qu'un de ses points décrive l'axe des x et que son plan soit toujours normal à la courbe $f(x, y) = 0$. Lieu de l'intersection de cette courbe avec le cylindre. — *Exemples :* Équation du cylindre $ax = y^2$; équation de la courbe mobile (rapportée à son plan) $bx = z^2$.

12. Trouver, sur un cylindre de révolution, l'équation différentielle des courbes qui ont un rayon de courbure constant.

13. a, b, c étant les cosinus des angles que la tangente à une courbe fait avec les axes coordonnés ; l, m, n les cosinus des angles de l'axe du plan osculateur avec les mêmes axes ; ρ et r les rayons de première et de seconde courbure, démontrer les relations

$$\frac{da}{dl} = \frac{db}{dm} = \frac{dc}{dn} = \frac{r}{\rho}.$$

14. Conclure de là que l'hélice est la seule courbe pour laquelle le rapport $\frac{r}{\rho}$ est constant, et que l'hélice à base circulaire est la seule courbe pour laquelle ρ et r soient constants.

15. Si une courbe non plane a son rayon de courbure constant, le lieu de ses centres de courbure a aussi son rayon de courbure constant, et, de plus, la première courbe est le lieu des centres de courbure de la seconde.

16. Étant donnée l'équation $f(x, y, z) = 0$ d'une surface, trouver le lieu du milieu de la portion de la normale en chaque point de la surface qui est comprise entre la surface et le plan des xy. — Application aux surfaces du second degré.

17. Conditions pour qu'un cône du second degré

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$$

soit tangent à un plan

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0.$$

18. Équation d'un conoïde droit [1011] exprimée au moyen des coordonnées r, p, z, en posant $x = r\cos p$, $y = r\sin p$. — Former l'équation aux rayons de courbure principaux dans ce système de coordonnées.

19. Étudier les surfaces de révolution engendrées par une parabole tournant 1° autour de sa tangente au sommet, 2° autour de sa directrice, 3° autour d'un quelconque de ses diamètres.

20. Étude du tore [765].

21. Étude de la surface engendrée par la révolution d'une hyperbole équilatère ou quelconque autour de ses asymptotes.

22. On appelle *binormale* la perpendiculaire menée par un point d'une courbe à son plan osculateur. Étudier le lieu des binormales à l'hélice.

23. Étude de la surface $xyz = a^3$.

24. Le cercle osculateur d'une courbe située sur une sphère est situé lui-même sur la sphère.

25. Entre les rayons de courbure et de torsion d'une courbe sphérique, on a la relation

$$\rho^2 + r^2 \frac{d\rho^2}{ds^2} = \text{const.}$$

26. Trouver, sur une sphère, une courbe de courbure constante.

27. Intersection d'un cylindre de révolution avec une sphère ayant son centre sur la surface du cylindre. — Équation de la courbe dans laquelle elle se transforme par le développement du cylindre sur un plan.

28. Sur une surface donnée, tracer une courbe telle que son arc croisse proportionnellement à l'accroissement de l'une des coordonnées rectangulaires, de z par exemple, de sorte que l'on ait, a étant une constante,

$$\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = a\,dz.$$

29. Lignes de courbure d'une surface de révolution.

30. Étude de la surface de révolution engendrée par la tractoire tournant autour de son asymptote. Mesure de la courbure de cette surface.

31. On prend pour axes des coordonnées sphériques deux grands cercles AX, AY, rectangulaires entre eux, et ayant pour pôles respectifs les points Y et X. La position d'un point M de la surface sphérique est déterminée par les points d'intersection P, Q des arcs (de grands cercles) YMP, XMQ avec les arcs AX, AY (les distances étant comptées soit de 0 à $\pm\pi$, soit de 0 à 2π). Si l'on pose $\operatorname{tang} AP = X$, $\operatorname{tang} AQ = Y$, quelles seront, dans ce système, les équations 1° d'un arc de grand cercle, 2° d'un arc de petit cercle (dans diverses positions), d'une conique sphérique, d'une loxodromie, d'une cycloïde sphérique, etc.? — Expressions de l'élément d'arc et de l'élément superficiel en fonction des coordonnées sphériques rectangulaires X, Y. Application au problème de Viviani, à la loxodromie, etc. — Traiter, sur la sphère, les problèmes analogues à ceux qui ont été traités au Chapitre I, relativement aux courbes planes (tangentes et normales, rayon et cercle de courbure, développées, enveloppes, etc.).

32. Étudier la courbe (*loxodromie*) qui coupe tous les méridiens d'une sphère sous un angle constant. — Construction des *cartes réduites*, ou représentation sur un plan des divers points de la sphère, de manière que les points d'une même loxodromie soient situés en ligne droite. Longueur, sur la carte réduite, du degré de latitude à partir d'une latitude donnée. — Expression, au moyen de la longitude et de la latitude, des coordonnées rectangulaires d'un point de la carte réduite, et *vice versa*.

33. Longueur d'un voyage de Hollande à Batavia, suivant des arcs de loxodromie ayant pour extrémités les points suivants :

	Longitude.		Latitude.	
	° ′ ″		° ′ ″	
Kijkduin	4.43.26	E.	52.57.6	N.
Rio-Janeiro	43. 1	O.	22.54	S.
Ile Amsterdam	77.52	E.	37.54	S.
Batavia	106.54.30	E.	6.12	S.

34. En prenant pour coordonnées sphériques la distance sphérique r d'un point M au pôle fixe P et l'angle p que fait l'arc de grand cercle PM ou r avec un demi-grand cercle fixe partant du point P, étudier les courbes représentées par les équations

$$r = ap, \quad \left(a = 1, 2, \frac{1}{2}, \cdots\right),$$

$$r = \frac{a}{p}, \qquad r = ae^{np},$$

$$r = a\sin p, \quad r = a\log p.$$

— Expressions de l'élément d'arc et de l'élément d'aire.

35. *Problème de Viviani.* — Sur un rayon OA d'une sphère donnée, pris comme diamètre, on décrit un cercle, sur lequel on élève un cylindre droit. Étudier la courbe d'intersection de la sphère et du cylindre, rapportée aux divers systèmes de coordonnées. — Calculer l'aire de la portion de sphère restée en dehors du cylindre, et l'aire de la portion de surface cylindrique comprise à l'intérieur de la sphère.

III.

1. Rectification des courbes suivantes :

(1) $2(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}} = 3a^2 y.$

(2) $ax = y^2, \; \frac{9}{16} z^2 = y^3.$

(3) $y^2 - 2a^2 = \sqrt[3]{9a^4x^2}, \quad az = y^2.$

(4) $ay = x^2, \; (x - a)^3 = \frac{9}{4} a z^2.$

2. Aire de la portion de l'ellipse $a^2y^2 = b^2(2ax - x^2)$ comprise dans l'intérieur de la parabole $y^2 = cx$. — *Exemple :* $a = 16$, $b = 8$, $c = 4$.

3. Aire comprise entre la parabole et sa développée.

4. Quadrature des courbes suivantes :

(1) Spirale hyperbolique.

(2) Lituus, $r^2 p = a^2$.

(3) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

5. Rectification des courbes suivantes :

(1) $y = ax^n$. Dans quel cas l'arc est-il une fonction algébrique de l'abscisse ?

(2) Cissoïde.

(3) Logarithmique.

(4) Chaînette.

6. Rectification et quadrature des courbes suivantes :

(1) Développante du cercle.

(2) Épicycloïde et hypocycloïde.

(3) Chaînette.

7. Relation entre l'arc d'une courbe et l'arc correspondant de sa caustique.

8. Si deux tangentes à la cycloïde comprennent entre elles un angle constant, leur somme est dans un rapport constant avec l'arc de courbe compris entre leurs points de contact.

9. Une courbe étant rapportée à des coordonnées polaires, trouver le maximum ou le minimum : 1° de l'aire (ou de l'arc) d'un secteur compris entre deux rayons vecteurs dont la somme est donnée ; 2° de l'aire d'un secteur dont l'arc a une longueur donnée ; 3° de l'aire (ou de l'arc) d'un secteur dont les rayons comprennent un angle donné.

10. Aire comprise entre une ellipse et sa développée.

11. Aire comprise entre deux cissoïdes de même cercle directeur et tournées en sens inverse, de manière que chacune ait son point de rebroussement sur l'asymptote de l'autre.

12. Aire comprise entre l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ et la parabole $y^2 = 2cx$.

13. Relation entre l'arc d'une courbe donnée et l'arc correspondant d'une courbe parallèle. — Aire comprise entre ces deux courbes et deux normales communes.

14. Un segment de parabole, compris entre la courbe, son axe et une ordonnée perpendiculaire à l'axe, tourne autour de la tangente à la parabole menée par l'extrémité de cette ordonnée. Calculer le volume engendré.

15. Volume engendré par la révolution autour de l'axe des x d'une courbe rapportée à des coordonnées obliques dont l'angle est θ. — Mesure de l'aire de la surface engendrée. — *Exemples :* 1° ellipse rapportée à deux diamètres conjugués; 2° parabole rapportée à un diamètre quelconque; 3° hyperbole rapportée soit à deux diamètres conjugués, soit à ses asymptotes.

16. Volumes engendrés : 1° par une conchoïde tournant autour de son axe de symétrie; 2° par une cissoïde tournant autour soit de son axe de symétrie, soit de son asymptote, soit de la parallèle menée par le sommet à l'asymptote; 3° par une cardioïde tournant autour de son axe de symétrie.

17. Volume de la portion d'un tronc de cylindre de révolution comprise entre deux plans passant par l'axe.

18. Partager le volume d'un cône de révolution en deux parties équivalentes par un plan parallèle à une génératrice.

19. Étant donné un segment d'hyperbole compris entre deux ordonnées perpendiculaires à l'axe transverse, calculer le volume engendré par le segment tournant autour de l'une de ces ordonnées. — *Exemple :* $2a = 10$, $2b = 8$, les ordonnées répondant à $x = a$ et à $x = 2a$.

20. Problème analogue pour la parabole $y^2 = 2kx$. — *Exemple :* $x = c$ et $4c$. Déterminer c de manière que la différence des volumes obtenus en faisant tourner le segment successivement autour de chacune des deux ordonnées soit égal à 1^{mc}, le paramètre $2k$ étant égal à 9^{m}.

21. Volume compris entre deux cylindres droits dont les bases sont des paraboles situées dans deux plans perpendiculaires, de telle sorte que l'axe de l'une soit la tangente au sommet de l'autre, la distance des deux sommets étant donnée.

22. Une sphère de rayon a est coupée par une surface prismatique ayant pour base un carré de côté $2b$. Calculer la surface sphérique et le volume interceptés par le prisme.

23. Une sphère coupe un cylindre de révolution. Prouver que la surface totale de la portion de cylindre intérieure à la sphère est égale au produit du diamètre du cylindre par le périmètre d'une ellipse ayant pour axes les segments maximum et minimum interceptés par la sphère sur les génératrices du cylindre.

24. Une génératrice d'un cône circulaire droit faisant une révolution entière pendant qu'un point mobile parcourt cette génératrice d'une extrémité à l'autre, les deux mouvements étant uniformes, déterminer dans quel rapport la courbe décrite partage la surface latérale du cône.

25. Volume compris entre un cylindre $f(x, y) = 0$, un cône ayant son sommet à l'origine des coordonnées, un plan $y = mx$ et le plan des xy. — *Exemple :* Le cylindre et le cône se coupent suivant la courbe $ax = y^2$, $ay = z^2$.

26. Du sommet A d'une parabole on mène une corde ANB sous-tendant l'arc AMB. Un carré, dont le plan est perpendiculaire à l'axe de la parabole, et qui a son côté égal et parallèle à la portion MN de l'ordonnée de la parabole, comprise entre la corde et l'arc, et son centre au milieu de MN, se meut d'une extrémité à l'autre de cet arc. Calculer le volume et la surface du solide engendré. — Problèmes analogues en remplaçant le segment de parabole par un demi-cercle, par un segment de cercle quelconque, par l'espace asymptotique d'une hyperbole équilatère ou autre, par un segment de cycloïde, etc.

27. Étant donné un segment ABC compris entre une parabole AB, sa tangente au sommet AC et une parallèle BC à l'axe, sur chaque portion de parallèle à l'axe comprise entre l'arc AB et la tangente AC on construit un rectangle perpendiculaire au plan de la courbe, et ayant une hauteur égale à la portion du prolongement de sa base comprise entre l'arc et la corde AB. — Volume du solide engendré par ce rectangle variable. — Même problème en supposant la hauteur du rectangle : 1° proportionnelle à sa distance au sommet A; 2° proportionnelle à sa distance à la droite BC; 3° égale à l'une de ces deux valeurs augmentée d'une constante.

28. Volume commun à deux cônes obliques ayant même base circulaire.

29. Un cône de révolution est coupé par un plan faisant avec la base un angle donné et passant par une corde donnée de cette base. Calculer les volumes et les aires des deux parties. — Cas où le plan est perpendiculaire à la base.

30. Quelle est la courbe qui engendre par sa révolution un solide dont le volume soit égal à la portion d'axe interceptée, multipliée par la demi-somme des bases circulaires?

31. Par un point O mener une courbe OMP satisfaisant à l'une des conditions suivantes :

(1) L'aire du segment OMP, compris entre la courbe, l'abscisse et l'ordonnée, a un rapport constant avec l'aire du rectangle OPMQ des coordonnées.

(2) Le volume engendré par la révolution du segment OPM, autour de Ox, a un rapport constant avec le volume engendré par OPMQ.

(3) La surface engendrée par la révolution de l'arc OM autour de Ox a un rapport constant avec la surface engendrée par la parallèle QM à l'axe Ox.

32. Étant donnée la courbe $y^2 = ax$, $az^2 = y^3$, calculer l'aire de la portion du cylindre qui projette la courbe sur le plan des yz, comprise entre le plan des xy, la courbe et 1° sa projection sur le plan $x = x$, 2° sa projection sur le plan des yz. — Mêmes questions pour la courbe $ax = y^2$, $by = z^2$.

33. Volume compris entre le plan des xy, le plan $x = a$, et les deux cylindres

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} ax = y^2, \\ by = z^2; \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad (2) \left\{ \begin{array}{l} y^m = a^{m-1}x, \\ z^n = b^{n-1}y; \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad (3) \left\{ \begin{array}{l} x^4 - a^2x^2 = a^2y^2, \\ y^2 = bz. \end{array} \right.$$

34. Volume compris entre les plans des xy et des yz, et les deux cylindres $x^2 + y^2 = a^2$, et $y^3 - a^2(y - z) = 0$.

35. Aire de la portion du cylindre $y^2 + z^2 = a^2$ limitée par les plans des xy et des yz, et par le cylindre $ax = y^2$.

36. Aire de la portion du cylindre $by = z^2$ comprise entre les plans des xy et des yz, le plan $y = c$ et le cylindre $ax = y^2$. — Même problème relativement aux deux cylindres $a^2 = yz$, $a^6 = xy^5$.

37. Volumes compris entre les plans des xy et des yz, le plan $y = c$ et les deux cylindres

(1) $ax = y^2$, et $y^2 + z^2 = a^2$;

(2) $a^2x = y^3$, et $y^4 + z^4 = a^4$.

38. Volume compris entre les plans des xy et des yz, le plan $x = c$ et les cylindres $ax = y^2$, et $yz = a^2$.

39. Volume compris entre les plans de xy et des xz, le plan $x = c$, et les deux cylindres $y^4 = a^4 - a^2x^2$, et $a^2z^4 = a^2x^4 - x^6$.

40. Volume compris entre les surfaces $f(x, y, z) = 0$ et $F(x, y) = 0$, les plans des xy et des xz, et le plan $x = \text{const.}$ — *Exemples :*

(1) $y^3 = x^2z$, $y^2 = ax$, $x = a$.

(2) $z^2 = 2xy$, $y^2 = ax$.

(3) $x^2 + y^2 = ay$, $y = b$.

(4) $xyz = a^3$, $ax = y^2$, les 3 plans coordonnés et $x = c$.

41. Deux galeries voûtées d'inégale largeur se rencontrent à angles droits. Les sections des voûtes sont des demi-ellipses ayant pour axes horizontaux les largeurs respectives des galeries, les demi-axes verticaux étant égaux entre eux. Calculer l'aire de la portion de voûte projetée suivant le rectangle qui forme la partie commune du sol des deux galeries. — Calculer le volume de l'espace commun aux deux galeries.

42. On coupe un cylindre de révolution donné par un plan parallèle à son axe et partageant, dans un rapport donné, le diamètre de la base auquel il est perpendiculaire. Calculer les deux parties du volume.

43. Un solide ayant la forme 1° d'une sphère, 2° d'un segment de paraboloïde de révolution dont l'axe est vertical, 3° d'un cylindre circulaire ou parabolique à génératrices horizontales, est plongé dans un liquide dont la densité est n fois la sienne : calculer à quelle profondeur il s'enfoncera dans le liquide.

44. Dans un ellipsoïde de révolution autour de son grand axe, on inscrit un cylindre de révolution de volume maximum. Déterminer les volumes et les surfaces des parties dans lesquelles ce cylindre divise l'ellipsoïde.

45. On fait tourner une ellipse successivement autour de ses deux axes, et, dans chacun des ellipsoïdes obtenus, on inscrit un cylindre de volume maximum. Calculer le rapport de ces deux volumes maxima.

46. On fait faire à l'une des branches d'une hyperbole une demi-révolution autour de sa tangente au sommet, de manière qu'elle vienne rencontrer l'axe imaginaire. On fait tourner autour de cet axe le segment ainsi déterminé. Aire et volume du solide engendré. — *Exemples :* $2a = 10$, $2b = 8$.

47. Volume engendré par la courbe $y = a^x$ tournant autour d'une parallèle à l'un ou à l'autre des deux axes coordonnés, menée par un point quelconque de la courbe.

48. Les douves d'un tonneau sont de forme elliptique, et le tonneau est de révolution autour du grand axe de l'ellipse. Il contient 200 litres; le diamètre de chacun des fonds est de $0^m,535$; celui de la bonde est de $0^m,626$. Calculer sa longueur.

49. Un tonneau a la forme d'un segment d'ellipsoïde à trois axes inégaux, terminés par deux plans symétriques par rapport à l'un des plans diamétraux principaux. L'axe $2a$, perpendiculaire au plan de symétrie, est horizontal, et le plan passant par cet axe et par l'axe $2b$ fait un angle α avec l'horizon. Le tonneau est rempli de liquide jusqu'à une hauteur h au-dessus de l'axe $2a$. On donne la longueur $2l$ du tonneau, le diamètre de la bonde $2b$, et les deux diamètres principaux $2m$ et $2n$ de chacun des deux fonds. Calculer la quantité du liquide contenu.

50. Un tonneau à douves paraboliques contient 200 litres; sa longueur, le diamètre de la bonde et celui des fonds sont entre eux comme les nombres 7, 6, 5. Calculer ses dimensions. — Même question, en supposant 1° le tonneau elliptique (comme ci-dessus), 2° le tonneau composé de quatre troncs de cône d'égale hauteur, et dont les rayons des bases sont connus.

51. Deux paraboles CAD, CBD, de sommets A et B, ont leurs axes AE, BE perpendiculaires entre eux, et une corde commune CD perpendiculaire à ces deux axes. Étudier la surface lieu des paraboles d'axe mobile AE et de sommet mobile A passant par les divers points de la parabole CBD. — Sections planes parallèles à CBD; leurs aires. Volume du solide ACBDA. Aire d'une section parallèle à CAD.

52. Le centre d'un carré horizontal, de grandeur variable, se meut sur le diamètre vertical d'un cercle vertical, de manière que le côté du carré soit toujours égal et parallèle à la corde suivant laquelle son plan coupe le cercle. Volume et aire de la surface engendrée par le contour du carré. — Mêmes problèmes, en remplaçant le carré par un polygone régulier de $2n$ côtés, dont l'apothème soit toujours égal à la demi-corde du cercle.

53. Aire du paraboloïde de révolution. — Centre de gravité et moments d'inertie de cette aire.

54. Densité moyenne d'une sphère composée de couches concentriques homogènes dont la densité varie suivant une loi donnée, par exemple, en raison inverse de la distance au centre.

55. Centre de gravité d'une sphère, en supposant que la densité de chaque section perpendiculaire à un diamètre donné soit proportionnelle au carré de la distance d'une des extrémités de ce diamètre à la circonférence de cette section.

56. Dans un paraboloïde de révolution, la densité d'une section perpendiculaire à l'axe est proportionnelle au rayon de cette section. Un segment du paraboloïde, limité par une de ces sections, est en équilibre sur un plan horizontal. Quel angle fait l'axe avec le plan horizontal?

57. Centre de gravité d'un arc de parabole dont la densité est proportionnelle à la distance à l'axe.

58. Centre de gravité du solide engendré par la révolution d'une courbe $f(x, y) = 0$ autour de l'axe des x, la densité étant fonction de x.

59. Centre de gravité d'un segment de cycloïde compris entre l'arc compté depuis le sommet et les coordonnées de l'autre extrémité de cet arc par rapport au sommet pris pour origine.

60. Centre de gravité d'un *prismoïde*, ou corps hexaédrique dont les bases sont deux rectangles ayant leurs côtés respectivement parallèles, les quatre autres faces étant des trapèzes.

61. Centre de gravité d'un segment de sphère.

62. Centre de gravité du volume engendré par la révolution d'un segment de cercle autour d'un diamètre ne coupant pas ce segment.

63. Moments d'inertie d'un tore par rapport à son axe de révolution et à son plan de symétrie perpendiculaire à cet axe.

64. Les deux surfaces intérieure et extérieure d'une voûte étant deux sphères concentriques, on en prend une portion comprise entre deux plans verticaux passant par le sommet de la voûte, et une surface conique ayant pour sommet le centre des deux sphères et pour axe la verticale du sommet de la voûte. Calculer la distance du centre de gravité de cette portion à la verticale du sommet.

65. Trouver une courbe telle que le segment AT, intercepté sur la tangente en un point fixe A de la courbe par la tangente TM en un point variable M, soit égal à la distance du centre de gravité de l'arc AM à une perpendiculaire Ax à la tangente AT.

66. Trouver une courbe telle que l'abscisse ξ du centre de gravité de l'arc soit une fonction donnée de l'abscisse x de l'extrémité de cet arc. — *Exemple :* $\xi = ax$.

67. Trouver les distances du centre de gravité d'un triangle sphérique aux plans des trois grands cercles qui forment les côtés du triangle.

68. Centre de gravité d'un demi-ellipsoïde de révolution.

69. Un cône de révolution étant coupé par un plan parallèle à une génératrice, trouver les centres de gravité des deux parties du volume.

70. Aire et centre de gravité du quadrilatère curviligne compris entre quatre paraboles de même foyer et de même axe, dont deux ont l'ouverture dirigée dans un sens et les deux autres en sens contraire.

71. Trouver une courbe, de forme analogue à la parabole, et qui soit telle que la tangente en un quelconque M de ses points rencontre la tangente au sommet A de la courbe en un point T, dont la distance à A soit égale à la distance entre le centre de gravité de l'arc AM et l'axe Ax normal à la courbe en A.

72. Moments d'inertie d'un arc de la parabole $y^2 = 2cx$ par rapport aux axes coordonnés.

73. Moment d'inertie de l'aire d'un triangle par rapport à une droite menée par un de ses sommets et non située dans son plan. — Moment d'inertie, par rapport à la même droite, du volume engendré par la révolution du triangle autour de cette droite.

74. Du volume d'un hémisphère on retranche celui d'un cylindre tangent à la

base de l'hémisphère et ayant pour diamètre le rayon de la sphère (*voir* problème de Viviani). Trouver le centre de gravité du volume restant.

75. Volumes, aires, centres de gravité, moments d'inertie des solides de révolution engendrés par les courbes suivantes :

(1) Cycloïde tournant autour de sa base ou de la tangente en son sommet ou en son point de rebroussement.

(2) Logarithmique.

(3) Chaînette $y = a \operatorname{Ch} \frac{x}{a}$ tournant autour de l'un ou de l'autre des axes coordonnés.

76. Un vase a la forme d'une couche sphérique comprise entre deux hémisphères concentriques. On le remplit d'eau, puis on le fait rouler sans glisser sur le plan horizontal. Lieu du centre de gravité du volume de l'eau qui y reste.

77. Moment d'inertie d'un tétraèdre homogène par rapport à une de ses arêtes.

78. Attraction de la surface ou du volume d'un cône de révolution sur son sommet.

79. Attraction de la circonférence ou de l'aire d'un cercle sur un point intérieur ou extérieur.

80. Attraction, sur un point, de la surface ou du volume d'un cylindre indéfini, agissant suivant la loi de Newton.

81. Composantes de l'attraction exercée, en raison inverse du carré de la distance,

(1) Par un point M sur une droite finie AB, perpendiculaire à MA;

(2) Par la portion MM' de la ligne MM'A sur la perpendiculaire AB;

(3) Par un point de l'axe d'un cercle sur l'aire de ce cercle; cas d'un cercle infiniment grand;

(4) Par le volume d'un cylindre de révolution sur un point de son axe.

82. Centres d'oscillation des corps suivants :

(1) Droite homogène suspendue par son extrémité.

(2) Droite homogène suspendue par son milieu et oscillant parallèlement à elle-même.

(3) Parabole mobile autour d'un axe horizontal (*a*) situé dans son plan, (*b*) perpendiculaire à son plan.

(4) Cercle mobile autour d'un axe rencontrant perpendiculairement son axe de figure.

(5) Solide de révolution mobile autour d'un axe rencontrant perpendiculairement son axe de figure. — *Exemples :* Paraboloïde, cône, sphère.

(6) Cercle mobile autour d'un axe perpendiculaire à son plan.

83. Centre de pression d'un fluide contre une portion de paroi verticale ayant la forme d'un segment de parabole d'axe vertical, dont le sommet est en haut, la base étant une corde horizontale. — Même question pour une paroi ayant la forme d'un rectangle vertical surmonté d'un demi-cercle.

LIVRE QUATRIÈME.

THÉORIE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

CHAPITRE PREMIER.

DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ENTRE DEUX VARIABLES EN GÉNÉRAL.

§ I.

INTÉGRATION DES EXPRESSIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE ET DU PREMIER DEGRÉ, CONTENANT PLUSIEURS VARIABLES INDÉPENDANTES.

772. Soit donnée une expression différentielle de la forme

$$M\,dx + N\,dy, \tag{1}$$

M et N étant des fonctions des deux variables indépendantes x, y. Pour que cette expression soit la différentielle d'une fonction

$$u = f(x, y)$$

de ces variables, il faut que M et N soient égales aux dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ de cette fonction, d'où il résulte [307] que l'on doit avoir identiquement

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Nous allons voir maintenant que cette condition est non-seulement nécessaire, mais encore suffisante.

773. S'il existe une fonction u telle que l'on ait

$$du = M\,dx + N\,dy,$$

cette fonction, ayant $M\,dx$ pour sa différentielle partielle par rapport à x, sera comprise dans la formule générale

$$(2) \qquad \int_{x_0}^{x} M\,dx + Y,$$

x_0 étant une constante quelconque, et Y une quantité arbitraire, indépendante de x et pouvant être fonction de y.

La fonction cherchée doit avoir, de plus, pour dérivée partielle par rapport à y, l'expression donnée N. Il faudra donc que l'on ait identiquement, en différentiant par rapport à y l'expression (2), d'après le n° 470,

$$N = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial M}{\partial y}\,dx + \frac{dY}{dy},$$

d'où l'on tire

$$(3) \qquad \frac{dY}{dy} = N - \int_{x_0}^{x} \frac{\partial M}{\partial y}\,dx.$$

Le premier membre étant indépendant de x, il devra en être de même du second; et réciproquement, si le second membre est indépendant de x, on pourra toujours déterminer, par l'intégration, la fonction Y qu'il reste à trouver pour compléter la valeur (2) de la fonction u. Il faut donc et il suffit, pour que le problème proposé soit possible, que la dérivée partielle du second membre de (3) par rapport à x soit identiquement nulle, ce qui donne la condition nécessaire et suffisante pour que l'expression (1) soit *intégrable*, c'est-à-dire pour qu'elle soit la différentielle exacte d'une fonction des deux variables indépendantes x, y, savoir

$$(4) \qquad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

774. En supposant cette condition vérifiée, substituons, dans l'équation (3), à $\frac{\partial M}{\partial y}$ sa valeur $\frac{\partial N}{\partial x}$, tirée de (4). Si l'on désigne par N_0 la valeur que prend la fonction N lorsqu'on y fait $x = x_0$,

on aura

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\partial N}{\partial x}\,dx = N - N_0,$$

et, par suite, la valeur de $\frac{dY}{dy}$ se réduira à

$$\frac{dY}{dy} = N_0, \quad \text{d'où} \quad Y = \int_{y_0}^{y} N_0\,dy + C,$$

y_0 et C étant des constantes quelconques. Donc, enfin, la fonction la plus générale, qui a pour différentielle $M\,dx + N\,dy$, et que nous désignerons par

$$\int (M\,dx + N\,dy),$$

a pour valeur

$$u = \int_{x_0}^{x} M\,dx + \int_{y_0}^{y} N_0\,dy + C.$$

Si l'on avait commencé l'intégration par le terme $N\,dy$, on aurait trouvé de la même manière, en désignant par M_0 la valeur de M pour $y = y_0$, cette autre expression de u, équivalente à la précédente,

$$u = \int_{y_0}^{y} N\,dy + \int_{x_0}^{x} M_0\,dx + C.$$

Exemple. — Soit proposé d'intégrer la différentielle

$$\frac{x^2 + xy + y^2}{x^2 + y^2}\left(\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y}\right).$$

On a ici

$$M = \frac{1}{x} + \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad N = -\frac{1}{y} - \frac{x}{x^2 + y^2},$$

et l'on peut d'abord vérifier aisément que ces valeurs satisfont à la condition d'intégrabilité (4). On a maintenant

$$\int M\,dx = \log x + \operatorname{arc\,tang}\frac{x}{y} + Y,$$

d'où, en prenant $x_0 = 1$,

$$\int_{x_0}^{x} M\,dx = \log x + \operatorname{arc\,tang}\frac{x}{y} - \operatorname{arc\,tang}\frac{1}{y}.$$

Ensuite

$$\int N_0\,dy = \int\left(-\frac{1}{y} - \frac{1}{1+y^2}\right)dy = \log\frac{1}{y} + \operatorname{arc\,tang}\frac{1}{y} + C.$$

Donc

$$u = \log\frac{x}{y} + \operatorname{arc\,tang}\frac{x}{y} + C.$$

775. *Remarques.* — I. Si l'expression $M\,dx + N\,dy$ se décompose en deux parties, dont l'une soit évidemment une différentielle exacte du_1 (comme cela a lieu, par exemple, lorsque cette partie ne dépend que d'une seule des deux variables), la partie restante $M\,dx + N\,dy - du_1 = d(u - u_1)$ devra satisfaire séparément à la condition d'intégralité, et alors on pourra l'intégrer séparément par la règle du numéro précédent.

Ainsi, dans l'exemple que nous venons de traiter, l'expression proposée pouvant s'écrire sous la forme

$$\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} + \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2+y^2},$$

les deux premiers termes forment évidemment la différentielle de $\log x - \log y = \log\frac{x}{y}$. Il ne reste plus qu'à intégrer le dernier terme, dont l'intégrale est $\operatorname{arc\,tang}\frac{x}{y} + C$.

II. On peut quelquefois simplifier le calcul au moyen d'un changement de variables indépendantes. En posant, par exemple,

$$x = r\cos p, \quad y = r\sin p,$$

l'expression

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{dy}{y}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

se réduit à

$$\frac{dr}{r} - \frac{1-\cos p}{\sin p}\,dp,$$

dont l'intégrale est

$$C + \log[r(1+\cos p)] = C + \log\left(x + \sqrt{x^2+y^2}\right).$$

776. Si l'on donne une expression différentielle à trois variables

indépendantes x, y, z, de la forme

$$M\,dx + N\,dy + P\,dz,$$

on verra, comme précédemment, que, si cette expression est la différentielle d'une fonction u des trois variables indépendantes, l'intégrale u sera comprise dans la forme la plus générale,

$$\int (M\,dx + N\,dy) + Z$$

(Z étant une fonction de z seul), des fonctions dont la différentielle, prise partiellement par rapport à x et à y, est $M\,dx + N\,dy$. Pour qu'il existe de telles fonctions, il faut et il suffit d'abord que la condition

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

soit identiquement vérifiée.

On trouve ensuite, en exprimant que cette fonction doit avoir P pour dérivée partielle par rapport à z,

$$\frac{dZ}{dz} = P - \frac{\partial \int (M\,dx + N\,dy)}{\partial z}.$$

Or, on a [774] et [307]

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \int (M\,dx + N\,dy)}{\partial z} = \displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{\partial M}{\partial z}\,dx + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial N_0}{\partial z}\,dy \\ \qquad = \displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{\partial M}{\partial z}\,dx + \int_{y_0}^{y} \left(\frac{\partial N}{\partial z}\right)_{y=y_0} dy \\ \qquad = \displaystyle\int \left(\frac{\partial M}{\partial z}\,dx + \frac{\partial N}{\partial z}\,dy\right), \end{cases}$$

d'où

$$\frac{dZ}{dz} = P - \int \left(\frac{\partial M}{\partial z}\,dx + \frac{\partial N}{\partial z}\,dy\right).$$

Le second membre devant être indépendant de x et de y, on trouve, en égalant à zéro ses dérivées partielles par rapport à ces deux variables, les deux nouvelles conditions

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial z},$$

qui, jointes à la précédente, forment les trois conditions nécessaires et suffisantes pour l'intégrabilité de la différentielle proposée.

En désignant par P_{00} ce que devient P lorsqu'on y fait à la fois $x = x_0$, $y = y_0$, on aura alors, comme dans le cas précédent,

$$\int (M\,dx + N\,dy + P\,dz) = \int_{x_0}^{x} M\,dx + \int_{y_0}^{y} N_0\,dy + \int_{z_0}^{z} P_{00}\,dz + C.$$

En suivant la même marche, on trouverait aisément les conditions d'intégrabilité et l'expression de l'intégrale dans le cas d'une différentielle renfermant un nombre quelconque de variables indépendantes.

777. Nous venons de voir que, dans le cas de trois variables, les conditions d'intégrabilité sont au nombre de $1 + 2 = 3$. Dans le cas de n variables, le même raisonnement conduirait à un nombre de conditions d'intégrabilité égal à

$$1 + 2 + \ldots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Jacobi a cependant démontré que, pour $n > 3$, ces conditions ne sont pas toutes distinctes entre elles, et que leur nombre peut se réduire à $2n - 3$.

Soient, en effet, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les n variables indépendantes, et

$$(1) \qquad M_1\,dx_1 + M_2\,dx_2 + \ldots + M_n\,dx_n$$

la différentielle donnée. Si l'on pose, pour abréger,

$$(ik) = \frac{\partial M_i}{\partial x_k} - \frac{\partial M_k}{\partial x_i},$$

il faut et il suffit, pour que la différentielle (1) soit intégrable, que toutes les quantités (ik) s'évanouissent identiquement.

Or, de l'identité

$$(2) \qquad \frac{\partial (kl)}{\partial x_i} + \frac{\partial (li)}{\partial x_k} + \frac{\partial (ik)}{\partial x_l} = 0,$$

qu'il est aisé de vérifier, il résulte que, dès que l'on aura à la fois

$$(ik) = 0, \quad (il) = 0,$$

la quantité (kl) ne contiendra pas x_i.

Cela posé, si l'on a en même temps les identités

$$(12) = 0,$$
$$(23) = 0, \quad (13) = 0,$$
$$(34) = 0, \quad (14) + x_3(24) = 0,$$

les égalités $(13) = 0$, $(34) = 0$ montrent que (14) ne contient pas x_3; les égalités $(23) = 0$, $(34) = 0$ montrent que (24) ne contient pas non plus x_3. Donc l'égalité $(14) + x_3(24) = 0$ ne peut avoir lieu identiquement que si l'on a à la fois $(14) = 0$ et $(24) = 0$.

En continuant de la même manière, on verra que les $\frac{n(n-1)}{2}$ conditions $(ik) = 0$ sont la conséquence des $2n - 3$ suivantes :

$$\begin{array}{ll}
0 = (12), & \\
0 = (23), & 0 = (13), \\
0 = (34), & 0 = (14) + x_3(24), \\
0 = (45), & 0 = (15) + x_4(25) + x_4^2(35), \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
0 = (n-1, n), & 0 = (1n) + x_{n-1}(2n) + x_{n-1}^2(3n) + \ldots + x_{n-1}^{n-3}(n-2, n).
\end{array}$$

Dans ces équations, on pourrait remplacer les multiplicateurs

$$x_3, \quad x_4, \quad x_4^2, \quad \ldots, \quad x_{n-1}, \quad \ldots, \quad x_{n-1}^{n-3}$$

par des fonctions quelconques

$$\lambda'_3, \quad \lambda'_4, \quad \lambda''_4, \quad \ldots, \quad \lambda'_{n-1}, \quad \ldots, \quad \lambda_{n-1}^{(n-3)},$$

assujetties aux seules conditions que les quantités

$$\lambda'_i, \quad \lambda''_i, \quad \ldots, \quad \lambda_i^{(i-2)}$$

ne soient pas toutes indépendantes de x_i et que, si les coefficients $a, a', \ldots, a^{(i-2)}$ ne sont pas tous nuls, on ne puisse avoir entre λ'_i, λ''_i, ... aucune relation linéaire de la forme

$$a + a'\lambda'_i + \ldots + a^{(i-2)}\lambda_i^{(i-2)} = 0,$$

dans laquelle a, a', ..., $a^{(i-2)}$ soient tous indépendants de x_i.

778. Démontrons maintenant deux théorèmes qui seront plus tard d'un fréquent usage.

I. Si u et v sont deux fonctions des variables indépendantes x, y, la condition nécessaire et suffisante pour que u soit une fonction de v est que l'on ait identiquement

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = 0.$$

En effet, 1° si u est fonction de v, on a, en posant $u = \varphi(v)$,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi'(v)\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \varphi'(v)\frac{\partial v}{\partial y},$$

d'où, par division, on tire immédiatement la formule (1).

2° Si u et v sont deux fonctions de x et de y, on peut, de la relation $v = f(x, y)$, tirer y en fonction de v et de x, et, en substituant cette valeur dans l'expression de u, on a généralement

$$u = \varphi(x, v),$$

d'où l'on tire

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi'(x) + \varphi'(v)\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \varphi'(v)\frac{\partial v}{\partial y}.$$

La condition (1) devient alors

$$\varphi'(x)\frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Or, v contenant en général y, $\frac{\partial v}{\partial y}$ n'est pas identiquement nul. Donc on a $\varphi'(x) = 0$, et, par suite, l'expression de u ne dépend que de v seul.

Si v ne contient pas y, on aura $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$. Dans ce cas, si l'on suppose $u = \varphi(v)$, il vient $\frac{\partial u}{\partial y} = \varphi'(v)\frac{\partial v}{\partial y} = 0$, et, par suite, le premier membre de la formule (1) est bien identiquement nul. Réciproquement, si la relation (1) a lieu, et que l'on ait $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$, il en résultera $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$; u est donc fonction de x seul, et par suite aussi de v seul.

Ce théorème n'est autre chose qu'un cas particulier de celui que nous avons démontré sur les déterminants fonctionnels [316].

779. II. Si u et v sont deux fonctions des variables indépendantes x, y, alors l'expression $u\,dv$ sera une différentielle exacte, si u est fonction de v; et, réciproquement, u sera fonction de v, si $u\,dv$ est une différentielle exacte.

En effet, la condition d'intégrabilité de l'expression

$$u\,dv = u\frac{\partial v}{\partial x}\,dx + u\frac{\partial v}{\partial y}\,dy$$

est

$$\frac{\partial\left(u\frac{\partial v}{\partial x}\right)}{\partial y} = \frac{\partial\left(u\frac{\partial v}{\partial y}\right)}{\partial x},$$

ou, en réduisant,

$$\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

ce qui n'est autre chose que la relation (1) du numéro précédent, laquelle est nécessaire et suffisante pour que u soit fonction de v.

§ II.

FORMATION D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DU PREMIER ORDRE PAR L'ÉLIMINATION D'UNE CONSTANTE ARBITRAIRE.

780. Soit donnée une équation

$$(1)\qquad F(x, y) = C,$$

représentant une série infinie de courbes, lorsqu'on fait prendre à la constante arbitraire C une infinité de valeurs successives. Si l'on différentie cette équation, la relation

$$(2)\qquad dF = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{\partial F}{\partial x} + y'\frac{\partial F}{\partial y} = 0,$$

qui ne contient plus C, exprime une propriété commune à toutes ces courbes, propriété qui consiste en une relation entre les coordonnées d'un point et l'inclinaison de la tangente en ce point, ou, ce qui revient au même, entre les coordonnées d'un point et les quantités, telles que la sous-tangente, la sous-normale, etc., qui dépendent de l'inclinaison de la tangente.

Cette relation s'appelle une *équation différentielle*, et cette équation différentielle est dite *du premier ordre*, parce qu'il n'y entre que les différentielles du premier ordre de x et de y, ou, en d'autres termes, parce qu'il n'y entre que la dérivée du premier ordre de y par rapport à x.

Les équations (1) et (2) étant chacune une conséquence de l'autre, l'équation (2) peut remplacer l'équation (1) et représente la même série infinie de courbes.

L'équation (1), qui est l'équation finie la plus générale qui satisfasse à l'équation (2), d'où elle se tire par l'intégration immédiate, est dite l'*intégrale générale* de l'équation (2).

Exemple. — Soit l'équation

$$x^2 + y^2 = C,$$

représentant une suite infinie de cercles qui ont pour centre commun l'origine des coordonnées. Cette équation donne, en différentiant,

$$x + yy' = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{y}{x} y' = -1,$$

équation différentielle qui exprime que la tangente est perpendiculaire au rayon vecteur. Cette même relation peut encore s'écrire ainsi :

$$yy' = S_n = -x,$$

et sous cette forme elle exprime que la normale au cercle passe à l'origine.

781. Si le premier membre de l'équation (2), par une transformation quelconque, se trouve multiplié par un certain facteur μ, l'équation résultante

$$(3) \qquad \mu . dF = 0$$

est bien une conséquence de l'équation (1). Mais ici la réciproque n'est plus vraie, puisque l'équation (3) peut être vérifiée, non-seulement lorsqu'on pose $dF = 0$ ou $F = \text{const.}$, mais encore lorsqu'on pose

$$(4) \qquad \mu = 0,$$

équation qui ne contient pas de constante arbitraire et qui ne peut, en général, coïncider avec (1), ni même être un cas particulier de (1) pour une valeur convenablement choisie de C, sauf des cas exceptionnels.

L'équation (3) admet donc deux solutions finies, l'une provenant de $d\mathrm{F} = 0$, et qui est l'intégrale générale (1), l'autre (4), qui ne contient pas de constante arbitraire et qui représente une courbe ne faisant pas partie, en général, de la série représentée par l'équation (1). Cette dernière solution s'appelle tantôt une *solution singulière*, tantôt une *solution étrangère* de l'équation différentielle (3), suivant que la valeur de y', tirée de la différentielle de l'équation (4) et substituée dans l'équation (2), satisfait ou non à cette équation.

782. *Exemples.* — I. Soit l'équation

$$(\alpha) \qquad y + \sqrt{y^2 - x^2} = \mathrm{C}.$$

On en tire, en différentiant,

$$(\beta) \qquad dy + \frac{y\,dy - x\,dx}{\sqrt{y^2 - x^2}} = 0.$$

Si l'on vient à faire disparaître le dénominateur, l'équation différentielle ainsi obtenue,

$$(\gamma) \qquad dy\sqrt{y^2 - x^2} + y\,dy - x\,dx = 0,$$

sera le produit de l'équation (β) par le facteur $\sqrt{y^2 - x^2}$. Elle sera donc vérifiée soit en prenant l'intégrale générale (α), soit en posant

$$\sqrt{y^2 - x^2} = 0.$$

Cette dernière équation, ne pouvant coïncider avec (α) pour aucune valeur de C combinée avec des valeurs finies des variables x et y, et donnant d'ailleurs pour $\frac{dy}{dx}$ une valeur qui satisfait à l'équation (γ), sera une solution singulière de cette équation, laquelle équation est, comme on voit, plus générale que l'équation primitive (α). Cette augmentation de généralité provient de ce qu'on

a multiplié (β) par un facteur susceptible de s'annuler pour des valeurs finies de x et de y.

II. Soit l'équation

$$x^n\left(y - \frac{bx}{n+1}\right) = C.$$

La différentiation donne

$$x^n\,dy + (nx^{n-1}y - bx^n)\,dx = 0,$$

que l'on peut mettre sous la forme

$$x^{n-1}[x\,dy + (ny - bx)\,dx] = 0,$$

et cette équation est équivalente à la proposée. Si maintenant on supprime le facteur x^{n-1}, et que l'on propose l'équation

$$(A)\qquad x\,dy + (ny - bx)\,dx = 0,$$

cette équation, équivalente à

$$\frac{1}{x^{n-1}}\,d\left[x^n\left(y - \frac{bx}{n+1}\right)\right] = 0,$$

admettra non-seulement la solution que l'on obtient en égalant le second facteur à zéro, et qui conduit à l'intégrale générale, mais encore toute solution qui peut satisfaire à l'équation

$$\frac{1}{x^{n-1}} = 0.$$

Cette équation ne donne pas de solution admissible pour $n \geq 1$. Pour $n < 1$, elle donne $x = 0$, solution qui, pour n positif, est comprise dans l'intégrale générale et correspond au cas de $C = 0$; c'est donc alors une intégrale particulière. Pour $n = 0$, l'intégrale générale, devenant alors $y - bx = C$, ne peut être vérifiée par aucune valeur de C combinée avec $x = 0$: cette solution $x = 0$ est donc une solution singulière ou étrangère de (A). Or cette solution donne $y' = \infty$, tandis que, d'après l'intégrale générale, on doit avoir $y' = b$. Donc c'est une solution étrangère. Enfin, pour $n < 0$, $x = 0$ redevient une intégrale particulière, correspondante à une valeur infinie de la constante C.

783. Si l'équation primitive n'est pas résolue par rapport à la

constante C, et qu'elle se présente sous la forme

$$(1) \qquad F(x, y, C) = 0,$$

on pourra, entre cette équation et sa différentielle

$$(2) \qquad dF(x, y, C) = 0,$$

éliminer la constante C, et l'équation résultante

$$(3) \qquad f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

exprimera encore une propriété commune à toutes les courbes représentées par l'équation (1).

L'équation (2) est plus générale que l'équation (1), lorsqu'on la considère isolément, car elle équivaut à

$$F(x, y, C) = C',$$

C' étant une nouvelle constante arbitraire. Mais, si l'on combine cette équation (2) avec l'équation (1) elle-même, cela revient à supposer $C' = 0$, et l'on est ainsi ramené à une généralité qui ne dépasse pas celle de l'équation (1).

784. Si la combinaison des équations (1) et (2), qui conduit à l'équation différentielle (3), se fait sans introduction de facteurs étrangers, l'équation résultante (3) pourra remplacer l'une des deux autres, (2) par exemple. Or l'ensemble des équations (1) et (2) donne, pour chaque système de valeurs de x et de y, une certaine valeur de y', ne contenant pas C. Donc (3) exprime la même liaison entre x, y, y' que l'ensemble des équations (1) et (2).

Cela a lieu encore, lors même que l'on aurait introduit ou supprimé, pendant l'élimination de C, des facteurs quelconques, pourvu qu'ils fussent indépendants de y'. Ainsi l'introduction de tels facteurs n'empêche pas l'équation (3) de représenter la relation entre x, y, y' qui résulte de l'équation (1), ce qui est le caractère essentiel d'une équation différentielle.

Mais, si l'élimination de C a introduit un tel facteur μ, indépendant de y', de sorte que l'équation (3) soit de la forme

$$\mu(x, y) \cdot \varphi(x, y, y') = 0,$$

cette équation pourra être encore vérifiée en posant $\mu = 0$, ce qui répond généralement, comme dans les exemples ci-dessus, à une solution singulière ou à une solution étrangère. Cette solution singulière ou étrangère provient de ce qu'alors (3) n'est plus la conséquence pure et simple de (1), puisqu'on a augmenté sa généralité par l'introduction du facteur étranger μ.

785. Si l'on suppose tout facteur étranger supprimé, l'équation (3), établissant une relation non identique entre x, y, y', équivaut à l'équation (1); car celle-ci peut toujours se mettre sous la forme

$$\varpi(x, y) = C.$$

En la différentiant sous cette forme, on trouve une relation

$$d\varpi = 0$$

indépendante de C et équivalente à $\varpi = C$ [780]. Mais cette relation $d\varpi = 0$ entre x, y, y' ne peut qu'être identique avec l'équation (3) délivrée de tout facteur étranger, puisque les deux relations doivent toujours fournir, pour chaque système de valeurs de x et de y, les mêmes valeurs de y'. Donc l'équation (3) équivaut entièrement à l'équation primitive (1) et représente la même série de courbes.

786. On peut éclaircir ce que nous venons de dire à l'aide d'une représentation géométrique fort simple.

Considérons C comme l'ordonnée variable, perpendiculaire au plan des xy, d'une surface ayant pour équation l'équation donnée (1). Si l'on attribue à C, dans cette équation, une valeur constante, alors l'équation représentera une ligne de niveau [648] de cette surface, ou, ce qui revient au même, la projection de cette ligne de niveau sur le plan des xy. Ainsi l'ensemble des courbes représentées par l'équation primitive (1), lorsqu'on y donne à C toutes les valeurs possibles, peut être considéré comme le système des projections sur le plan des xy de toutes les lignes de niveau de la surface $F(x, y, C) = 0$.

Pour chaque système de valeurs de x et de y, on a un certain point de la surface par lequel passe une ligne de niveau déterminée. En menant la tangente à cette ligne de niveau, on a une va-

leur déterminée de y' pour chaque système de valeurs de x et de y. Si nous construisons, par rapport aux mêmes axes, une nouvelle surface $f(x, y, y') = 0$, dont les ordonnées perpendiculaires en chaque point du plan des xy représentent les valeurs correspondantes de y', on aura ainsi deux surfaces liées entre elles de telle manière que la première détermine complétement la seconde.

Réciproquement, le y' des lignes de niveau est donné pour chacune d'elles par la différentiation de l'équation (1) dans l'hypothèse de C constant, ce qui donne l'équation

$$(2) \qquad dF = 0, \quad \text{ou} \quad F_1(x, y, y', C) = 0.$$

Si l'on combine (1) et (2) de manière à éliminer C, sans introduire de facteurs étrangers, l'équation différentielle (3) pourra remplacer une des équations (1) et (2). Or, si l'on avait mis l'équation de la surface (1) sous la forme $C = \varpi(x, y)$, la différentiation aurait donné immédiatement l'équation de la seconde surface, dont y' est l'ordonnée, et de cette dernière équation $d\varpi = 0$, équivalente à (3), on aurait déduit, par l'intégration immédiate, l'équation de la surface primitive (1). Donc les deux surfaces sont telles, que chacune d'elles est complétement déterminée par l'autre.

787. Cependant l'équation différentielle (3) ne convient pas seulement, en général, aux projections des courbes de niveau de la surface (1), mais encore à l'enveloppe de ces projections [581]. Imaginons que l'on circonscrive à la surface (1) un cylindre dont les arêtes soient parallèles à l'axe des ordonnées C [646], et dont la base sera le contour apparent de la surface sur le plan des xy. La courbe de contact du cylindre avec la surface a, en chacun de ses points, sa tangente comprise dans le plan tangent commun au cylindre et à la surface, lequel contient en même temps la tangente à la ligne de niveau qui passe par ce point. Il s'ensuit de là que, les deux tangentes ayant même projection sur le plan des xy, la projection de la courbe de contact est tangente en chacun de ses points à la projection de la ligne de niveau correspondante à ce point; en d'autres termes, le contour apparent de la surface est l'enveloppe des projections des lignes de niveau. Donc, en chaque point de cette enveloppe, le y' est le même pour le contour apparent et pour l'enveloppée qui passe en ce point. Donc, la relation

qui donne le y' de l'enveloppée qui passe au point (x, y) de l'enveloppe doit être vérifiée aussi par le y' de l'enveloppe, c'est-à-dire que l'enveloppe satisfait aussi bien que les enveloppées à l'équation différentielle (3).

Généralement, la courbe de contact du cylindre parallèle aux ordonnées n'est pas une courbe de niveau de la surface; donc, en général, le contour apparent ne fait pas partie de la série des projections des lignes de niveau. L'équation de l'enveloppe fournit donc une solution de l'équation différentielle, ne contenant point de constante arbitraire, et ne faisant point partie, en général, de la série des courbes représentées par l'équation intégrale générale (1); mais la valeur de y', tirée de cette solution, satisfait à l'équation différentielle (3), en ayant égard, en général, à l'équation de l'enveloppe elle-même. Une telle solution est une *solution singulière* de l'équation différentielle. On voit que, bien qu'elle ne rentre pas comme cas particulier dans l'intégrale générale, elle n'en est pas moins indissolublement liée à cette intégrale, dont elle est une conséquence.

788. Cette solution singulière, c'est-à-dire l'équation du cylindre parallèle aux ordonnées et circonscrit à la surface (1), peut être donnée, dans certains cas, par les facteurs étrangers introduits pendant ou après l'élimination de C. Mais ces facteurs, égalés à zéro, peuvent aussi représenter des cylindres ayant pour bases des courbes de niveau : ce sont alors des *intégrales particulières*, pouvant se déduire de l'intégrale générale en particularisant convenablement la constante C; ou bien ces cylindres ont pour bases des courbes qui ne sont ni des projections de lignes de niveau, ni l'enveloppe de ces projections, et qui n'ont, par conséquent, aucune relation essentielle avec l'équation différentielle, puisque la valeur de y' que l'on tirerait de ces solutions par différentiation ne saurait coïncider avec celle que donne l'équation différentielle, et qui ne convient qu'aux projections des lignes de niveau et à leur enveloppe. Nous appellerons, pour cette raison, ces solutions des *solutions étrangères* de l'équation différentielle.

Il ne faudrait pas croire cependant que de telles solutions doivent être rejetées *a priori*; car, si les conditions d'un problème donnent l'équation différentielle sous la forme $\mu.\varphi(x, y, y') = 0$,

il peut arriver que ce soit le facteur μ qui, égalé à zéro, fournisse la vraie solution.

789. *Exemples.* — I. Étant donnée l'équation

$$y^2 = 2Cx,$$

on en tire, en différentiant,

$$y\,dy = C\,dx,$$

d'où, en éliminant C,

$$y' = \frac{y}{2x}, \quad \text{ou} \quad S_t = 2x,$$

expression de la propriété connue de la sous-tangente à la parabole, laquelle est la même pour toutes les paraboles de même sommet et de même axe.

Réciproquement, de l'équation $y' = \dfrac{y}{2x}$, on tire

$$\frac{2\,dy}{y} = \frac{dx}{x},$$

d'où, en intégrant, et représentant par $\log 2C$ la constante arbitraire,

$$2\log y = \log x + \log 2C, \quad y^2 = 2Cx,$$

ce qui montre que l'équation primitive est une conséquence de l'équation différentielle.

II. Soit l'équation générale des coniques concentriques

$$y^2 = Cx^2 + k.$$

On en tire

$$y\,dy = Cx\,dx, \quad C = \frac{yy'}{x},$$

où, en introduisant la sous-tangente relative à l'axe des y, $S'_t = xy'$,

$$C = \frac{y}{x^2} S'_t.$$

On a donc

$$y^2 = yS'_t + k, \quad \text{ou} \quad S'_t = y - \frac{k}{y},$$

propriété commune à toutes les coniques, et qui sert à la construction de la tangente.

Réciproquement, de l'équation différentielle, mise sous la forme

$$xy' = y - \frac{k}{y}, \quad \text{ou} \quad \frac{2y\,dy}{k - y^2} + \frac{2\,dx}{x} = 0,$$

on tire, par l'intégration,

$$-\log(k - y^2) + \log x^2 + \log(-C) = 0,$$

d'où l'on déduit l'équation primitive proposée.

III. Soit l'équation générale

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = C$$

des paraboles tangentes aux deux axes coordonnés et ayant pour axe principal la bissectrice de l'angle de ces axes. On tire de cette équation, en différentiant,

$$\frac{dx}{\sqrt{x}} - \frac{dy}{\sqrt{y}} = 0;$$

si l'on chasse les dénominateurs, cette équation différentielle prend la forme

$$\sqrt{y}\,.dx - \sqrt{x}\,.dy = 0, \quad \text{ou} \quad \sqrt{xy}\left(\frac{dx}{\sqrt{x}} - \frac{dy}{\sqrt{y}}\right) = 0.$$

Sous cette forme, on voit qu'on y satisfait, non-seulement en annulant le second facteur, ce qui donne l'intégrale générale, mais encore en posant $\sqrt{xy} = 0$, ce qui donne le système des axes coordonnés. Or, chacun de ces axes étant tangent à chaque parabole, leur système n'est autre chose que l'enveloppe de la série de paraboles : il représente donc une *solution singulière* de l'équation différentielle.

790. Nous démontrerons bientôt d'une manière rigoureuse qu'une équation différentielle donnée *a priori*,

$$y' = \varphi(x, y),$$

admet toujours une *intégrale générale* renfermant une constante arbitraire, c'est-à-dire qu'il existe une surface dont les tangentes

à une même ligne de niveau quelconque satisfont toutes à cette équation.

Si l'on représente l'intégrale générale par une courbe, on peut dire que l'équation de cette courbe sera telle que, en disposant convenablement de la constante arbitraire qu'elle renferme, on pourra faire passer cette courbe par un point du plan désigné à volonté.

On peut donner comme il suit un premier aperçu de la démonstration de ce théorème. A l'aide de l'équation différentielle, mise sous la forme

$$(1) \qquad dy = \varphi(x, y)\,dx,$$

construisons un polygone infinitésimal passant par un point donné (x_0, y_0), dont les côtés aient pour projections sur l'axe des x les valeurs successives de dx, savoir

$$dx_0 = x_1 - x_0, \quad dx_1 = x_2 - x_1, \quad \dots,$$

et pour coefficients d'inclinaison les valeurs correspondantes de $\varphi(x, y)$,

$$\varphi(x_0, y_0), \quad \varphi(x_1, y_1), \quad \dots.$$

La limite de ce polygone sera une courbe passant par le point arbitraire (x_0, y_0), et telle que les coordonnées de chacun de ses points et le coefficient angulaire de la tangente correspondante satisfont à l'équation différentielle.

On peut encore, ce qui revient au même, construire une série de points ayant pour abscisses successives

$$x_0, \quad x_1 = x_0 + dx_0, \quad x_2 = x_1 + dx_1, \quad \dots,$$

et pour ordonnées correspondantes

$$y_0, \quad y_1 = y_0 + \varphi(x_0, y_0)\,dx_0, \quad y_2 = y_1 + \varphi(x_1, y_1)\,dx_1, \quad \dots.$$

En joignant ces points par un trait continu, on a le polygone infinitésimal de tout à l'heure.

791. On conçoit facilement la présence d'une constante arbitraire dans l'équation intégrale générale. En effet, l'équation diffé-

rentielle détermine une relation entre dy, x, y, pour une valeur infiniment petite de dx. Dans cette relation unique entre trois quantités, rien ne détermine le valeur de y, qui correspond à un x donné, et à partir de laquelle l'accroissement de y doit se faire. Mais, cette valeur étant une fois choisie à volonté, les accroissements sont dès lors déterminés par l'équation, et par là même est déterminée toute la suite des valeurs de y.

792. L'équation différentielle

$$(1) \qquad y' = \varphi(x, y)$$

détermine, en fonction de x et de y, non-seulement la dérivée première y', mais encore toutes les dérivées suivantes. Si l'on différentie, en effet, l'équation, ce qui donne y'' en fonction de x, y, y', puis qu'on remplace y' par sa valeur tirée de l'équation (1), on aura pour y'' une expression de la forme

$$y'' = \varphi_1(x, y).$$

En traitant de même cette dernière équation, et continuant ensuite de la même manière, on obtiendra successivement y''', y^{iv}, ..., exprimées toutes en fonction de x et de y.

793. Cela posé, l'équation différentielle fournit le moyen de développer l'intégrale générale par le théorème de Taylor, en admettant que la variable reste renfermée dans des limites assez étroites pour que la série soit toujours convergente.

Soit, en effet, y_0 la valeur arbitraire de y qui doit correspondre à la valeur x_0 de l'abscisse à partir de laquelle on veut faire le développement. L'équation différentielle fera connaître [792] les valeurs

$$y'_0, \; y''_0, \; y'''_0, \; \ldots$$

de toutes les dérivées de y qui correspondent au point (x_0, y_0). On pourra donc développer en série la valeur de y', ce qui donnera

$$y' = y'_0 + \frac{y''_0}{1}(x - x_0) + \frac{y'''_0}{1.2}(x - x_0)^2 + \ldots,$$

expression équivalente à l'équation différentielle donnée. En inté-

grant cette série entre des limites pour lesquelles la convergence subsiste [357], et observant que $y = y_0$ pour $x = x_0$, il viendra

$$y = y_0 + \frac{y'_0}{1}(x - x_0) + \frac{y''_0}{1.2}(x - x_0)^2 + \frac{y'''_0}{1.2.3}(x - x_0)^3 + \ldots.$$

Réciproquement, on déduirait de cette dernière équation, par la différentiation [358], l'équation précédente, qui équivaut à l'équation différentielle proposée.

Exemple. — Soit l'équation

$$y' = ay.$$

On en tire, par différentiation et élimination,

$$y'' = ay' = a^2 y, \quad y''' = a^2 y' = a^3 y, \quad \ldots,$$

d'où, en supposant $y = y_0$ pour $x = 0$, et substituant, dans la formule précédente,

$$y = y_0 + \frac{ax}{1} y_0 + \frac{a^2 x^2}{1.2} y_0 + \frac{a^3 x^3}{1.2.3} y_0 + \ldots = y_0 e^{ax}.$$

Remarquons que l'on n'aurait pas eu plus de généralité en laissant quelconque la valeur initiale x_0 de x qu'en la supposant, comme nous l'avons fait, égale à zéro. On aurait eu, en effet, dans ce cas,

$$y = y_0 + \frac{a(x - x_0)}{1} y_0 + \frac{a^2(x - x_0)^2}{1.2} y_0 + \ldots = y_0 e^{a(x - x_0)} = y_0 e^{-ax_0} e^{ax},$$

où $y_0 e^{-ax_0}$ représente une constante arbitraire, ni plus ni moins que y_0 dans la précédente valeur.

§ III.

FORMATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES D'ORDRE SUPÉRIEUR AU PREMIER, PAR L'ÉLIMINATION DE PLUSIEURS CONSTANTES ARBITRAIRES.

794. Si une équation finie renferme deux paramètres arbitraires elle représentera deux séries de courbes, suivant que l'on considérera l'un ou l'autre de ces paramètres comme seul variable; et

l'on pourra former deux équations différentielles du premier ordre, exprimant chacune une propriété commune à toutes les courbes de l'une ou de l'autre de ces séries, suivant qu'on éliminera l'un ou l'autre de ces paramètres entre l'équation donnée et sa différentielle immédiate.

Exemples. — I. De l'équation

$$y^2 = Cx^2 + C'$$

on tire, en différentiant (ce qui élimine C'), l'équation différentielle

$$yy' = Cx,$$

qui exprime une propriété de la sous-normale relative à l'axe des x de la série de courbes dans laquelle C' est variable et C constant. En éliminant C entre les deux équations précédentes, on a cette autre équation différentielle

$$xy' = y - \frac{C'}{y},$$

qui exprime (789, II) une propriété de la sous-tangente relative à l'axe des y de la série de courbes dans laquelle C est variable et C' constant.

II. L'équation

$$y = Cx^a + C'x^{-a}$$

donne, par la différentiation,

$$y' = aCx^{a-1} - aC'x^{-a-1},$$

d'où l'on tire, en éliminant l'une ou l'autre des deux constantes, les deux équations différentielles du premier ordre

$$ay + xy' = 2aCx^a, \quad ay - xy' = 2aC'x^{-a}.$$

III. Étant donnée l'équation générale

$$(x - a)^2 + y^2 = c^2$$

de tous les cercles qui ont leur centre sur l'axe des x, on en tire, en éliminant soit c, soit a, les deux équations différentielles

$$\frac{y}{x - a} \cdot y' = -1, \quad y^2(1 + y'^2) = N^2 = c^2,$$

exprimant deux propriétés géométriques communes l'une à une série de cercles concentriques et de rayon variable, l'autre à une série de cercles de rayon constant ayant leurs centres aux divers points de l'axe des x.

795. En joignant, à l'équation donnée

$$F(x, y, C, C') = 0$$

et à sa différentielle première

$$dF = 0,$$

sa différentielle seconde

$$d^2F = 0,$$

on pourra entre ces trois équations éliminer les deux paramètres C, C', et l'on obtiendra ainsi une équation différentielle *du second ordre*

$$f(x, y, y', y'') = 0,$$

exprimant une propriété commune à toutes les courbes de la double série représentée par l'équation $F = 0$.

Si l'on désigne par ρ le rayon de courbure,

$$\rho = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''},$$

on pourra exprimer y'' en fonction de y' et de ρ, et, en substituant cette expression

$$y'' = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho}$$

dans l'équation $f(x, y, y', y'') = 0$, cette équation différentielle du second ordre deviendra une relation entre les coordonnées x, y de chaque point de la courbe, le coefficient d'inclinaison y' de la tangente et le rayon de courbure ρ en ce point.

Cette relation géométrique est évidemment indépendante de la manière dont on a opéré, pour l'obtenir, l'élimination des constantes C, C'. Donc on parviendra toujours à la même équation différentielle du second ordre, de quelque manière que l'on s'y prenne pour éliminer les deux constantes arbitraires, soit en

combinant directement les trois équations $F = 0$, $dF = 0$, $d^2F = 0$, soit en éliminant d'abord C entre $F = 0$ et $dF = 0$, puis en éliminant C′ entre l'équation obtenue et sa différentielle, etc.

796. En raisonnant comme nous l'avons fait pour les équations différentielles du premier ordre, on verra que (sauf l'introduction des facteurs étrangers) l'équation différentielle du second ordre est équivalente à l'une ou à l'autre des deux équations du premier ordre d'où elle peut se déduire, et que l'on appelle les *intégrales premières* de l'équation du second ordre.

Or, chacune de ces intégrales premières est elle-même équivalente à l'équation primitive. Donc l'équation différentielle du second ordre est équivalente à une équation finie, renfermant deux constantes arbitraires, et qui est dite l'*intégrale générale* de l'équation du second ordre.

797. En combinant entre elles les deux intégrales premières, mises sous la forme

$$f_1 = C, \quad f_2 = C',$$

on en tirera une nouvelle équation différentielle du premier ordre

$$\varphi(f_1, f_2) = \varphi(C, C') = C''$$

(φ désignant une fonction arbitraire), qui sera une nouvelle forme d'intégrale première de l'équation du second ordre. Cette équation exprimera une propriété commune à toutes celles des courbes de la double série dans lesquelles les paramètres C et C′ sont liés entre eux par la relation $\varphi(C, C') = C''$. Cette nouvelle intégrale, pouvant remplacer une des anciennes, sera, comme chacune de celles-ci, équivalente à l'équation primitive. On peut le rendre évident, en remarquant que l'on peut introduire C″ au lieu de C′, par exemple, dans l'équation $F = 0$, et que l'élimination de C entre celle-ci et sa différentielle ne peut conduire qu'à une équation équivalente à $\varphi(f_1, f_2) = C''$.

798. Reprenons les exemples du n° 794.

I. En différentiant l'équation du premier ordre

$$yy' = Cx,$$

il vient $yy''+y'^2=C$, d'où, en éliminant C, on tire l'équation du second ordre

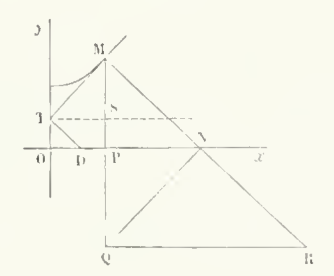
$$xyy''+xy'^2-yy'=0,$$

qui convient à toutes les coniques dont les axes principaux sont dirigés suivant les axes coordonnés. Si l'on introduit, à la place de y'', le rayon de courbure ρ, l'équation devient

$$xy(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}+\rho y'(xy'-y)=0.$$

Or on a MN = la normale N = MP séc MTx ou $=y\sqrt{1+y'^2}$;

Fig. 85.



on construit ensuite, par des perpendiculaires, MQ = MP séc² MTx, puis MR = MP séc³ MT$x=y(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}$. D'ailleurs,

$$\text{OT}=\text{MP}-\text{MS}=y-xy'.$$

Donc l'équation différentielle devient, à cause de OD = OT.y',

$$\text{OP}.\text{MR}=\rho.\text{OD},$$

d'où l'on déduit ρ par la construction d'une quatrième proportionnelle.

En mettant les deux intégrales premières sous la forme

$$\frac{yy'}{x}=C,\quad y^2-xyy'=C',$$

on en tirera, par exemple, une troisième intégrale première

$$y - xy' = C'' \frac{y}{x},$$

C'' étant égal à $\frac{C'}{C}$.

II. De l'équation différentielle du premier ordre

$$ay + xy' = 2Cax^a$$

on tire par différentiation

$$(1 + a)y' + xy'' = 2Ca^2x^{a-1},$$

d'où, en éliminant C,

$$x^2y'' + xy' - a^2y = 0.$$

En combinant par multiplication les deux intégrales premières, on en tirerait une troisième intégrale première

$$x^2y^2 - x^2y'^2 = 4C'C''a^2 = C''.$$

III. L'équation du premier ordre

$$y^2 + y^2y'^2 = c^2$$

donne immédiatement

$$yy'(1 + y'^2 + yy'') = 0,$$

ou, en négligeant le facteur yy', qui ne donnerait qu'une solution étrangère,

$$1 + y'^2 + yy'' = 0, \quad \text{d'où} \quad \rho = -y\sqrt{1 + y'^2} = -N,$$

équation qui exprime que le centre de courbure est sur l'axe des x.

799. Il est facile de s'expliquer comment une équation différentielle du second ordre, donnée *a priori*, peut déterminer une courbe satisfaisant à deux conditions arbitraires, telles que de passer par un point donné et d'avoir en ce point une tangente ou une normale donnée.

Prenons, en effet, pour correspondre à l'abscisse initiale x_0, l'ordonnée arbitraire y_0, et menons une droite ayant pour coefficient angulaire la valeur arbitraire y'_0 et passant par ce point.

L'équation différentielle

$$y'' = \varphi(x, y, y')$$

déterminera la variation infiniment petite $y''_0 dx_0 = dy'_0$ du coefficient angulaire de la tangente, lorsqu'on passe du point (x_0, y_0) au point infiniment voisin (x_1, y_1) pris sur la première tangente. On construira de même une troisième tangente en un troisième sommet infiniment voisin (x_2, y_2) pris sur la seconde tangente, cette troisième tangente ayant pour coefficient angulaire $y'_1 + y''_1 dx_1$; et ainsi de suite. On obtiendra ainsi un polygone infinitésimal, dont la limite sera une courbe qui représentera par son équation l'intégrale générale de l'équation différentielle donnée.

On peut encore prendre l'équation différentielle sous la forme

$$\rho = \chi(x, y, y').$$

Au point $M_0(x_0, y_0)$ on mène une normale arbitraire, sur laquelle on porte la longueur ρ_0 déterminée par l'équation $\rho_0 = \chi(x_0, y_0, y'_0)$. On obtient ainsi le centre de courbure N_0 du point M_0. De ce centre N_0 on tracera un arc de cercle infiniment petit $M_0 M_1$. Sur la normale $M_1 N_0$ on portera la longueur $\rho_1 = \chi(x_1, y_1, y'_1)$, ce qui donnera un second centre de courbure N_1, d'où l'on décrira un nouvel arc de cercle infiniment petit $M_1 M_2$; et ainsi de suite. On aura ainsi un polygone curviligne, dont les côtés seront des arcs de cercle infiniment petits, et qui aura pour limite une courbe représentant l'intégrale générale de l'équation différentielle du second ordre.

800. On peut aussi se servir du théorème de Taylor pour développer en série la valeur de y. On fera voir d'abord, comme on l'a fait pour le cas d'une équation du premier ordre, que l'équation différentielle du second ordre détermine, en fonction des quantités x, y, y', la dérivée seconde y'' et toutes les dérivées suivantes y''', y^{IV}, ... En désignant donc par y_0, y'_0 les valeurs arbitraires de y, y' qui correspondent à la valeur initiale $x = x_0$, on connaîtra en fonction de ces quantités arbitraires tous les coefficients du développement de

$$y'' = y''_0 + \frac{y'''_0}{1}(x - x_0) + \frac{y^{\text{IV}}_0}{1.2}(x - x_0)^2 + \ldots,$$

et cette équation donne, en intégrant deux fois entre les limites x_0 et x,

$$y = y_0 + y'_0(x - x_0) + \frac{y''_0}{1.2}(x - x_0)^2 + \ldots,$$

expression de y au moyen de x et des quantités arbitraires y_0, y'_0.

Exemple. — Soit l'équation

$$y'' + a^2 y = 0.$$

On en tire successivement

$$y''' + a^2 y' = 0, \quad y^{\text{IV}} + a^2 y'' = y^{\text{IV}} - a^4 y = 0,$$
$$y^{\text{V}} - a^4 y' = 0, \quad y^{\text{VI}} - a^4 y'' = y^{\text{VI}} + a^6 y = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Donc, en supposant $x_0 = 0$,

$$\begin{aligned} y &= y_0 + \frac{x}{1} y'_0 - \frac{a^2 x^2}{1.2} y_0 - \frac{a^2 x^3}{1.2.3} y'_0 + \frac{a^4 x^4}{1.2.3.4} y_0 + \ldots \\ &= y_0\left(1 - \frac{a^2 x^2}{1.2} + \frac{a^4 x^4}{1.2.3.4} - \ldots\right) + \frac{y'_0}{a}\left(\frac{ax}{1} - \frac{a^3 x^3}{1.2.3} + \frac{a^5 x^5}{1.2\ldots5} - \ldots\right) \\ &= y_0 \cos ax + \frac{y'_0}{a} \sin ax. \end{aligned}$$

L'intégrale générale peut donc se mettre sous la forme

$$y = C \cos ax + C' \sin ax.$$

Si, au lieu de supposer $x_0 = 0$, on avait laissé x_0 quelconque, l'expression que l'on aurait obtenue,

$$\begin{aligned} y &= y_0 \cos a(x - x_0) + \frac{y'_0}{a} \sin a(x - x_0) \\ &= \left(y_0 \cos a x_0 - \frac{y'_0}{a} \sin a x_0\right) \cos ax + \left(y_0 \sin a x_0 + \frac{y'_0}{a} \cos a x_0\right) \sin ax, \end{aligned}$$

aurait encore pu se ramener à la forme $C \cos ax + C' \sin ax$, et, par conséquent, n'aurait pas eu plus de généralité qu'en prenant $x_0 = 0$.

801. Si l'équation primitive $F = 0$ contient trois paramètres arbitraires, on parviendra, par leur élimination entre l'équation et ses trois premières différentielles, à avoir une équation différentielle du troisième ordre, que l'on pourra interpréter géométriquement comme étant une relation entre x, y, y', le rayon de courbure ρ de la courbe, et le rayon de courbure $\rho_1 = \frac{\rho\, d\rho}{ds}$ de la développée [580].

Une équation du troisième ordre est indépendante de l'ordre dans lequel s'effectue l'élimination des trois paramètres.

Elle est équivalente à chacune de ses trois intégrales premières, ou équations du second ordre, renfermant chacune une constante arbitraire, et de la forme

$$f_1(x, y, y', y'', C) = 0;$$

à chacune de ses trois intégrales secondes, ou équations du premier ordre, renfermant chacune deux constantes arbitraires, et de la forme

$$f_2(x, y, y', C, C') = 0,$$

et enfin à son intégrale générale, qui est l'équation primitive avec trois constantes arbitraires,

$$F(x, y, C, C', C'') = 0.$$

On verrait, comme dans le cas précédent, que l'équation différentielle du troisième ordre peut servir à construire approximativement la courbe, soit par un polygone rectiligne infinitésimal, soit par un polygone curviligne obtenu en construisant approximativement la développée et le lieu de ses centres de courbure. On pourrait aussi tirer de l'équation différentielle le développement de l'ordonnée de la courbe suivant la série de Taylor.

802. En général, si une équation renferme n paramètres arbitraires, on pourra les éliminer entre l'équation et ses n premières différentielles, et former ainsi une équation différentielle du $n^{\text{ième}}$ ordre. Au lieu d'éliminer toutes les constantes à la fois, on pourra, par des combinaisons différentes des $n + 1$ équations

$F = 0$, $dF = 0$, ..., $d^nF = 0$, éliminer

1 constante	de n	manières différentes,	
2 »	de $\frac{n(n-1)}{2}$	»	»
3 »	de $\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}$	»	»
...	...	...	...
$n-1$ »	de n	»	»
n »	de 1 seule manière.		

ce qui donne, entre autres, n équations différentielles de l'ordre $n-1$, contenant chacune une constante arbitraire, et qui sont les *intégrales premières* de l'équation différentielle du $n^{\text{ième}}$ ordre.

Si l'on connaissait les n intégrales premières, on obtiendrait l'intégrale générale en éliminant entre ces n équations les $n-1$ dérivées $y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$.

On pourra considérer l'équation différentielle d'ordre n comme une relation entre x, y, y' et les rayons de courbure de la courbe, de sa développée, de la développée de sa développée, ou *développée du second ordre*, de la *développée du troisième ordre*, et ainsi de suite, jusqu'à la *développée du* $(n-2)^{\text{ième}}$ *ordre*.

L'équation différentielle de l'ordre n a (sauf les solutions singulières et les solutions étrangères) la même généralité que l'équation primitive à n constantes arbitraires d'où elle est tirée, et peut remplacer cette équation primitive.

Elle peut servir soit à construire approximativement l'intégrale générale, soit à former son développement par la série de Taylor.

§ IV.

TOUTE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE D'ORDRE QUELCONQUE ENTRE DEUX VARIABLES A UNE INTÉGRALE GÉNÉRALE.

803. Nous allons démontrer que toute équation différentielle entre deux variables a une intégrale générale, c'est-à-dire que l'on peut construire à l'aide de cette équation un polygone infinitésimal, ayant pour limite déterminée une courbe satisfaisant à n con-

ditions choisies arbitrairement, n étant l'ordre de l'équation différentielle.

Commençons par traiter le cas d'une équation différentielle du premier ordre, que nous supposerons mise sous la forme

$$(1) \qquad y' = f(x, y),$$

et supposons la fonction $f(x, y)$ continue par rapport à x et à y dans le voisinage des valeurs de ces variables que nous aurons à considérer.

Par un point arbitraire (x_0, y_0) du plan, menons une droite ayant pour coefficient angulaire la quantité

$$y'_0 = f(x_0, y_0).$$

Donnons à x un accroissement $dx_0 = x_1 - x_0$, auquel correspondra l'accroissement de y

$$y_1 - y_0 = f(x_0, y_0)(x_1 - x_0).$$

A partir du point (x_1, y_1) menons une droite ayant pour coefficient angulaire

$$y'_1 = f(x_1, y_1),$$

et donnons à x un nouvel accroissement $dx_1 = x_2 - x_1$, auquel correspondra l'accroissement de y

$$y_2 - y_1 = f(x_1, y_1)(x_2 - x_1).$$

Et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on soit arrivé à une certaine abscisse finale $x_n = X$, le dernier accroissement de y étant

$$Y - y_{n-1} = f(x_{n-1}, y_{n-1})(X - x_{n-1}).$$

On aura ainsi construit un polygone, dont l'ordonnée finale Y sera égale à l'ordonnée initiale y_0, plus la somme des accroissements successifs, c'est-à-dire que l'on aura

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} Y - y_0 = f(x_0, y_0)(x_1 - x_0) + f(x_1, y_1)(x_2 - x_1) + \ldots \\ + f(x_{n-1}, y_{n-1})(X - x_{n-1}). \end{aligned} \right.$$

804. Puisque l'on suppose $f(x_0, y_0)$ fini, le rapport de l'accrois-

sement $y_1 - y_0$ à l'accroissement $x_1 - x_0$ aura une valeur finie l_0. L'accroissement suivant $y_2 - y_1$ aura encore un rapport fini avec $x_2 - x_1$, si la fonction $f(x, y)$ est finie pour les valeurs $x = x_1$, $y = y_1$, différant de quantités non infinies $x_1 - x_0$, $l_0(x_1 - x_0)$ des valeurs x_0, y_0, de sorte qu'on aura

$$y_2 - y_1 = h_1(x_2 - x_1),$$

h_1 étant une quantité finie; et ainsi de suite. Si nous supposons que l'intervalle $X - x_0$ soit pris de telle manière qu'aucune des quantités $h_0, h_1, \ldots$ ne soit infinie, l'accroissement $Y - y_0$ sera égal à la somme $X - x_0$ des accroissements de x, multipliée par une moyenne h entre les quantités h_0, h_1, ..., c'est-à-dire par une quantité finie. Donc $Y - y_0$ sera, dans ces conditions, une quantité finie, quel que soit le nombre des divisions de l'intervalle $X - x_0$.

La condition que nous supposons remplie consiste en ce qu'aucun des côtés du polygone ne devienne parallèle à l'axe des y, ou, plus exactement, en ce qu'une droite tournant autour d'un point fixe, de manière à devenir successivement parallèle aux divers côtés du polygone, ne passe jamais, dans son mouvement continu, par une position parallèle à l'axe des y. On pourra toujours partager l'intervalle $X - x_0$ en intervalles partiels, pour chacun desquels cette supposition soit réalisée. Ainsi $f(x, y)$ est supposée finie pour toutes les valeurs de x et de y qui répondent aux sommets du polygone, et, de plus, continue dans le voisinage de ces valeurs.

825. Pour apprécier l'influence d'une subdivision ultérieure des intervalles sur la valeur de la somme (2), considérons un élément unique

$$(3) \qquad f(x_0, y_0)(X - x_0),$$

et comparons-le à la somme (2), résultant de la division de l'intervalle en n parties. La quantité (3) pouvant s'écrire sous la forme

$$f(x_0, y_0)(x_1 - x_0) + f(x_0, y_0)(x_2 - x_1) + \ldots + f(x_0, y_0)(X - x_{n-1}),$$

on voit que la différence des deux quantités (2) et (3) a pour

valeur

$$(4)\quad\left\{\begin{aligned}&[f(x_1,y_1)-f(x_0,y_0)](x_2-x_1)\\&\quad+[f(x_2,y_2)-f(x_0,y_0)](x_3-x_2)+\ldots\\&=[f(x_1,y_1)-f(x_0,y_0)][(X-x_1)-(X-x_2)]\\&\quad+[f(x_2,y_2)-f(x_0,y_0)][(X-x_2)-(X-x_3)]+\ldots\\&=[f(x_1,y_1)-f(x_0,y_0)](X-x_1)\\&\quad+[f(x_2,y_2)-f(x_1,y_1)](X-x_2)+\ldots,\end{aligned}\right.$$

expression que l'on peut obtenir directement, en remarquant que l'accroissement total de Y, résultant de la division de l'intervalle, est égal à la somme des segments interceptés sur la dernière ordonnée entre les prolongements de deux côtés consécutifs du polygone, segments égaux aux intervalles $X-x_1$, $X-x_2$, ..., multipliés respectivement par les accroissements correspondants de $y'=f(x,y)$.

Or, si nous supposons les deux dérivées partielles

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=f_1(x,y),\quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=f_2(x,y)$$

finies, comme la fonction $f(x,y)$ elle-même, pour les valeurs de x et de y considérées, on aura [339]

$$\begin{aligned}f(x_1,y_1)-f(x_0,y_0)&=f_1(\xi,\eta)(x_1-x_0)+f_2(\xi,\eta)(y_1-y_0)\\&=[f_1(\xi,\eta)+k_0f_2(\xi,\eta)](x_1-x_0),\end{aligned}$$

ξ et η désignant des valeurs moyennes de la forme

$$\xi=x_0+\theta(x_1-x_0),\quad \eta=y_0+\theta(y-y_0),$$

θ étant positif et <1, et k_0 ayant une valeur finie, égale à $f(x_0,y_0)$. Donc, si l'on représente par u_0 une quantité finie, quel que soit l'intervalle x_1-x_0, fini ou infiniment petit, on aura

$$f(x_1,y_1)-f(x_0,y_0)=u_0(x_1-x_0).$$

On trouvera de même

$$\begin{aligned}f(x_2,y_2)-f(x_1,y_1)&=u_1(x_2-x_1),\\f(x_3,y_3)-f(x_2,y_2)&=u_2(x_3-x_2),\end{aligned}$$

et ainsi de suite, $u_1, u_2, \ldots$ étant des quantités toujours finies.

Donc la somme (4), ou l'accroissement de Y résultant de la division de l'intervalle $X - x_0$, sera de la forme

$$u_0(X - x_1)(x_1 - x_0) + u_1(X - x_2)(x_2 - x_1) + \ldots.$$

Cette quantité est égale à la moyenne des quantités $u_0, u_1, \ldots$, qui est une quantité finie u, multipliée par la somme des seconds facteurs

$$(X - x_1)(x_1 - x_0) + (X - x_2)(x_2 - x_1) + \ldots + (X - x_{n-1})(x_{n-1} - x_{n-2}).$$

Si l'on suppose maintenant les intervalles partiels infiniment petits, cette somme convergera vers l'intégrale

$$\int_{x_0}^{X} (X - x)\,dx = \frac{1}{2}(X - x_0)^2.$$

Donc, lorsqu'on remplace un intervalle unique $X - x_0$ par une infinité de divisions infiniment petites, la limite du changement qui en résulte pour l'ordonnée extrême Y est de la forme

$$(5) \qquad \frac{1}{2} u (X - x_0)^2,$$

u étant une quantité finie.

On voit d'abord que cet accroissement de Y est toujours fini lorsque l'intervalle $X - x_0$ est fini. Lorsque cet intervalle est infiniment petit, l'accroissement (5) est infiniment petit du second ordre.

806. Revenons maintenant à la somme (2), et supposons qu'on y subdivise à l'infini chacun des intervalles partiels $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1, \ldots$.

L'ordonnée y_1 subira, par l'effet de la subdivision de l'intervalle $x_1 - x_0$, un accroissement δy_1 de la forme

$$\delta y_1 = u_0 (x_1 - x_0)^2,$$

u_0 étant fini. Il en résultera pour $y'_1 = f(x_1, y_1)$ un accroissement

$$\delta y'_1 = f_2(x_1, y_1 + \theta\,\delta y_1)\,\delta y_1 = v_0 (x_1 - x_0)^2,$$

v_0 étant une quantité finie.

L'accroissement de $y_2 = y_1 + y'_1(x_2 - x_1)$ se composera de l'accroissement de y_1, plus l'accroissement de $y'_1(x_2 - x_1)$, plus une quantité de la forme $u_1(x_2 - x_1)^2$, u_1 étant une quantité finie, fonction de $x_1, y_1 + \delta y_1, \ldots$. Donc on aura

$$\delta y_2 = u_0(x_1 - x_0)^2 + u_1(x_2 - x_1)^2 + v_0(x_1 - x_0)^2(x_2 - x_1),$$

ou, en remarquant que $u_0 + v_0(x_2 - x_1)$ est une quantité finie que l'on peut encore représenter par u_0,

$$\delta y_2 = u_0(x_1 - x_0)^2 + u_1(x_2 - x_1)^2.$$

En continuant le même raisonnement, on verra que Y, par l'effet de la subdivision, croîtra d'une quantité que l'on pourra mettre sous la forme

$$\delta Y = u_0(x_1 - x_0)^2 + u_1(x_2 - x_1)^2 + \ldots + u_{n-1}(X - x_{n-1})^2,$$

$u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$ étant des quantités finies. On peut mettre cette expression sous la forme du produit de $X - x_0$ par une moyenne entre les quantités infiniment petites

$$u_0(x_1 - x_0), \quad u_1(x_2 - x_1), \quad \ldots, \quad u_{n-1}(X - x_{n-1}),$$

laquelle moyenne ne peut qu'être elle-même infiniment petite. On voit donc que l'accroissement δY est infiniment petit, si tous les intervalles $x_1 - x_0, \ldots, X - x_{n-1}$ sont infiniment petits.

Donc on peut toujours diviser l'intervalle $X - x_0$ en parties assez petites pour que Y ne puisse plus varier qu'infiniment peu par l'effet d'une subdivision ultérieure quelconque. Donc, Y tend vers une limite finie et déterminée.

On prouverait, comme nous l'avons fait [237], que la limite de Y est indépendante du mode de subdivision.

Ainsi, l'ordonnée Y, construite au moyen de l'équation différentielle, et dont la dérivée

$$\lim \frac{Y - y_{n-1}}{X - x_{n-1}} = \lim f(x_{n-1}, y_{n-1}) = f(X, Y)$$

satisfait à cette équation, est une fonction déterminée de l'abscisse finale X et de la valeur arbitraire y_0, que l'on a choisie pour l'ordonnée initiale.

807. Remarquons que, la construction ci-dessus pouvant être continuée de part et d'autre de l'abscisse x_0, cette abscisse initiale peut être considérée comme l'abscisse d'un point quelconque de la courbe. Si l'on fait varier y_0 d'une manière continue, chacun des éléments de la somme (2) variera infiniment peu par rapport à lui-même pour un accroissement infiniment petit de y_0; la somme elle-même variera donc infiniment peu, et, par suite, Y est une fonction continue de y_0.

Donc, en faisant varier y_0, on fera varier d'une manière continue les ordonnées de tous les points de la courbe. On peut ainsi faire varier, en général, y_0 de manière à faire prendre à une ordonnée quelconque y une valeur assignée d'avance. Donc on peut dire, en généralisant ce qui concerne l'ordonnée considérée d'abord comme ordonnée initiale, que la courbe déterminée par l'équation différentielle peut satisfaire à la condition de passer par un point quelconque désigné sur le plan, c'est-à-dire que la condition nécessaire et suffisante qu'il faut joindre à l'équation différentielle pour que la courbe soit complétement déterminée équivaut à faire passer la courbe par un point arbitraire du plan ou à faire prendre à y, pour une valeur donnée de x, une valeur arbitraire.

Cette condition peut être remplie par toute équation renfermant une constante arbitraire, et donnant pour y et y' des valeurs satisfaisant à l'équation différentielle, quelle que soit cette constante. Or, si l'on choisit la constante de manière à satisfaire à la condition initiale, la courbe se trouve alors complétement déterminée par la seule condition de satisfaire à l'équation différentielle. Donc toutes les courbes qui satisfont à l'équation différentielle forment une série unique de courbes qui ne diffèrent entre elles que par la valeur d'un paramètre arbitraire.

808. Il peut sembler cependant, au premier abord, que la valeur de Y, que nous avons déterminée ci-dessus, dépende des *trois* quantités x_0, y_0, X, de sorte que l'équation de la courbe se présente avec deux constantes arbitraires, sous la forme

$$\varphi(X, Y, x_0, y_0) = 0.$$

Mais il faut remarquer que cette équation n'est pas de forme quel-

conque, et que sa forme particulière doit permettre de réduire à l'unité le nombre des arbitraires. En effet, si l'on fait tendre X vers x_0, Y devra tendre vers y_0, de sorte qu'on aura, à la limite,

$$\varphi(x_0, y_0, x_0, y_0) = 0;$$

et, comme x_0 et y_0 sont deux quantités arbitraires et indépendantes l'une de l'autre, cette équation ne peut être qu'une identité. Donc la relation entre les coordonnées de deux points, qui représente l'intégrale générale de l'équation différentielle, doit se transformer en identité lorsque les deux systèmes de valeurs des variables viennent à coïncider.

De plus, puisqu'on peut prendre pour point initial un point quelconque de la courbe, si l'on désigne par y l'ordonnée qui correspond à l'abscisse x dans la courbe qui passe au point (X, Y), on pourra prendre x pour abscisse initiale au lieu de x_0, et l'équation de la courbe pourra se mettre sous la forme

$$\varphi(X, Y, x, y) = 0.$$

Si l'on fait maintenant coïncider (X, Y) avec (x_0, y_0), on voit que l'on aura, pour une abscisse quelconque x,

$$\varphi(x_0, y_0, x, y) = 0.$$

Donc la courbe peut être indifféremment représentée par l'une ou l'autre des deux équations

$$\varphi(x, y, x_0, y_0) = 0, \quad \varphi(x_0, y_0, x, y) = 0,$$

c'est-à-dire que la relation entre les deux systèmes de valeurs des coordonnées du point initial et du point final ne change pas lorsqu'on échange entre eux ces deux systèmes.

On voit que, dans cette relation, la valeur de x_0 est indifférente, et que l'on obtient telle ou telle courbe du système en faisant correspondre à n'importe quelle valeur de x_0 une valeur de y_0 convenablement choisie. Ainsi, l'équation n'a pas plus de généralité qu'une relation contenant une seule constante arbitraire.

809. Passons maintenant au cas d'une équation différentielle d'un ordre quelconque m, que nous supposerons mise sous la

forme

$$(1) \qquad y^{(m)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(m-1)}).$$

Nous allons montrer d'abord que cette équation détermine pour $y^{(m-1)}$ une valeur fonction de x et des m constantes $y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(m-1)}$, qui représentent les valeurs de $y, y', \ldots, y^{(m-1)}$ pour $x = x_0$.

Pour un point (x_0, y_0) du plan, l'équation (1) détermine $y_0^{(m)}$ en fonction de $x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(m-1)}$. Menons, par le point qui a pour coordonnées $(x_0, y_0^{(m-1)})$, une droite dont le coefficient angulaire soit cette valeur de $y_0^{(m)}$. Si nous faisons croître x_0 de dx_0, $y_0^{(m-1)}$ croîtra de $dy_0^{(m-1)} = y_0^{(m)}\, dx_0$, et prendra une nouvelle valeur $y_1^{(m-1)}$. Donnons aux quantités $y_0^{(m-2)}, y_0^{(m-3)}, \ldots, y_0$ les accroissements

$$y_1^{(m-2)} - y_0^{(m-2)} = y_0^{(m-1)}\, dx_0, \quad y_1^{(m-3)} - y_0^{(m-3)} = y_0^{(m-2)}\, dx_0, \quad \ldots,$$
$$y_1 - y_0 = y'_0\, dx_0,$$

et avec les nouvelles valeurs de ces quantités déterminons la nouvelle valeur de $y^{(m)}$,

$$y_1^{(m)} = f(x_1, y_1, y'_1, \ldots, y_1^{(m-1)}).$$

En passant de même du second système de valeurs à un troisième, et ainsi de suite, on construira un polygone dont les ordonnées des sommets seront les diverses valeurs de $y^{(m-1)}$, depuis l'abscisse initiale x_0 jusqu'à l'abscisse finale X. L'accroissement de $y^{(m-1)}$ dans cet intervalle sera

$$\mathrm{Y}^{(m-1)} - y_0^{(m-1)} = f_0 \,.\, dx_0 + f_1 \,.\, dx_1 + \ldots + f_{n-1} \,.\, dx_{n-1},$$

en désignant, pour abréger, par f_i l'expression $f(x_i, y_i, y'_i, \ldots, y_i^{(m-1)})$.

Si l'on suppose l'intervalle $\mathrm{X} - x_0$ choisi de manière que la fonction f ne passe pas par l'infini dans cet intervalle, c'est-à-dire de manière que la droite qui suit la direction des côtés du polygone ne passe pas par une position parallèle à l'axe des y, on verra que l'accroissement $\mathrm{Y}^{(m-1)} - y_0^{(m-1)}$, étant égal à l'intervalle total $\mathrm{X} - x_0$ multiplié par une moyenne entre les valeurs de f, sera une quantité finie, quel que soit le nombre des divisions de l'intervalle.

En second lieu, si l'on remplace un seul intervalle $\mathrm{X} - x_0$ par n intervalles partiels

$$x_1 - x_0, \quad x_2 - x_1, \quad \ldots, \quad \mathrm{X} - x_{n-1},$$

l'accroissement $Y^{(m-1)} - y_0^{(m-1)} = (X - x_0) f_0$ variera d'une quantité que l'on peut, d'après ce que nous avons vu plus haut, mettre sous la forme

$$(f_1 - f_0)(X - x_1) + (f_2 - f_1)(X - x_2) + \ldots.$$

On a, d'ailleurs, en supposant les dérivées partielles de f finies dans l'intervalle $X - x_0$, comme la fonction elle-même,

$$f_1 - f_0 = f'(\xi)(x_1 - x_0) + f'(\eta)(y_1 - y_0) + \ldots + f'(\eta^{(m-1)})(y_1^{(m-1)} - y_0^{(m-1)});$$

et, comme tous les accroissements $y_1 - y_0, \ldots, y_1^{(m-1)} - y_0^{(m-1)}$ sont les produits de $x_1 - x_0$ par des quantités finies, $f_1 - f_0$ prendra la forme

$$u_0(x_1 - x_0),$$

u_0 étant une quantité finie. Et de même pour les autres. On en conclut, comme on l'a fait pour les équations du premier ordre, que la variation que subit l'accroissement $Y^{(m-1)} - y_0^{(m-1)}$ est une quantité dont la valeur limite est de la forme

$$\frac{1}{2} u (X - x_0)^2,$$

u étant une quantité finie.

Il résulte enfin de là que, si l'on part d'une subdivision de l'intervalle total en éléments infiniment petits, l'accroissement $Y^{(m-1)} - y_0^{(m-1)}$ ne subira plus que des variations infiniment petites. Donc cet accroissement tend vers une limite déterminée, indépendante, comme on peut le démontrer, du mode de subdivision de l'intervalle $X - x_0$ en parties infiniment petites.

810. Il s'ensuit de là que $Y^{(m-1)}$ est une fonction déterminée de X et des quantités arbitraires $x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(m-1)}$, ayant pour dérivée

$$\lim \frac{Y^{(m-1)} - y_{n-1}^{(m-1)}}{X - x_{n-1}} = \lim f_{n-1} = f(X, Y, \ldots),$$

et par suite satisfaisant à l'équation différentielle. Ainsi, de l'équation différentielle (1) on déduit une équation de la forme

$$y^{(m-1)} = \varphi(x, x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(m-1)}),$$

$y^{(m-1)}$ ayant pour dérivée

$$y^{(m)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(m-1)}),$$

où $y, y', \ldots$ sont les limites des valeurs obtenues comme on vient de le voir, limites que l'on démontrerait être finies et déterminées, comme on l'a fait pour $y^{(m-1)}$.

En intégrant $m-1$ fois de suite cette expression de $y^{(m-1)}$, et déterminant chaque fois la constante d'après la condition que, pour $x = x_0$, on ait $y = y_0$, $y' = y'_0, \ldots, y^{(m-1)} = y_0^{(m-1)}$, on parviendra à une relation entre x, y et les m constantes arbitraires $y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(m-1)}$, laquelle sera l'*intégrale générale* de l'équation différentielle proposée.

Remarquons que, d'après la loi de formation des fonctions $y^{(m-1)}, y^{(m-2)}, \ldots, y'$, chacune d'elles est la dérivée de la suivante, et c'est pour cela qu'elles se reproduisent dans les intégrations successives.

Si l'on donne maintenant une équation

$$F(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_m) = 0,$$

renfermant m constantes arbitraires *distinctes*, c'est-à-dire telles qu'on puisse les déterminer de manière que, pour $x = x_0$, y et ses $m-1$ premières dérivées prennent des valeurs choisies arbitrairement, et que la valeur de y tirée de cette équation satisfasse à l'équation différentielle (1), quelles que soient ces m constantes, cette équation ne pourra que coïncider avec l'intégrale générale dont nous venons d'établir l'existence.

CHAPITRE II.

INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE ENTRE DEUX VARIABLES.

§ I.

PRINCIPALES MÉTHODES POUR L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE ET DU PREMIER DEGRÉ.

811. I. *Intégration immédiate.* — Supposons d'abord que l'équation différentielle donnée soit du premier degré par rapport à $\frac{dy}{dx}$, et, par suite, qu'elle puisse se mettre sous la forme

$$M\,dx + N\,dy = 0,$$

M et N étant des fonctions données de x et de y. Si le premier membre de cette équation est la différentielle exacte d'une fonction des variables x et y, considérées comme indépendantes, cette fonction, dont la différentielle doit être nulle en vertu de l'équation, ne pourra que conserver une valeur constante. On aura donc la relation

$$\int (M\,dx + N\,dy) = C,$$

qui contient une constante arbitraire et qui sera l'intégrale générale de l'équation proposée.

Exemples. — 1° L'équation

$$(2\alpha x + \beta y + \delta)\,dx + (\beta x + 2\gamma y + \varepsilon)\,dy = 0$$

a pour intégrale générale

$$\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + \delta x + \varepsilon y = C.$$

2° L'équation

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{dy}{y}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = 0$$

donne, en représentant la constante arbitraire par $\log C$,

$$\operatorname{Arg\,Sh}\frac{x}{y} + \log y = \log\left(x + \sqrt{x^2+y^2}\right) = \log C,$$

d'où

$$y^2 = C^2 - 2Cx.$$

812. II. *Séparation des variables.* — L'intégration immédiate peut s'effectuer dans le cas où les variables sont *séparées,* c'est-à-dire où l'équation est de la forme

$$X\,dx + Y\,dy = 0,$$

X étant une fonction de x, Y une fonction de y. L'intégrale générale de l'équation est alors

$$\int X\,dx + \int Y\,dy = 0.$$

Exemples. — 1° Soit l'équation

$$\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} = 0;$$

on en tire, en représentant par $\log C$ la constante arbitraire,

$$\log x - \log y = \log C, \quad \text{d'où} \quad x = Cy.$$

2° Soit l'équation

$$\frac{dx}{1+x^2} + \frac{dy}{1+y^2} = 0;$$

on en tire, en représentant par $\operatorname{arc\,tang} C$ la constante arbitraire,

$$\operatorname{arc\,tang} x + \operatorname{arc\,tang} y = \operatorname{arc\,tang}\frac{x+y}{1-xy} = \operatorname{arc\,tang} C,$$

d'où

$$\frac{x+y}{1-xy} = C.$$

813. On peut ramener au cas précédent toute équation de l'une des formes

$$Y\,dx + X\,dy = 0,$$
$$X_1 Y\,dx + X Y_1\,dy = 0,$$

X, X_1 étant des fonctions de x, et Y, Y_1 des fonctions de y. Il suffira, pour cela, de diviser chacune de ces équations par le produit XY, en tenant d'ailleurs compte comme il convient [781] du facteur ainsi supprimé.

Exemples. — 1° L'équation

$$y\,dx - x\,dy = 0$$

devient, en divisant par xy,

$$\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} = 0,$$

d'où [812]

$$x - Cy = 0.$$

L'équation différentielle donnée équivaut à

$$xy\,.\,d\log\frac{x}{y} = 0.$$

La solution supprimée $xy = 0$ correspond aux deux intégrales particulières $x = 0$, $y = 0$, que l'on obtiendrait en faisant tour à tour $C = 0$, $C = \infty$.

2° L'équation

$$\sqrt{y}\,dx - \sqrt{x}\,dy = 0$$

donne, en divisant par $\sqrt{xy}$,

$$\frac{dx}{\sqrt{x}} - \frac{dy}{\sqrt{y}} = 0,$$

d'où l'intégrale générale

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = C.$$

Le facteur supprimé $\sqrt{xy}$, égalé à zéro, donnerait une solution singulière [789, III].

Nous allons examiner maintenant deux cas généraux, dans les-

quels, par une transformation convenable, on peut rendre les variables séparables.

814. III. *Équations homogènes.* — Soit une équation de la forme

$$M\,dx + N\,dy = 0,$$

M et N étant deux fonctions homogènes de même degré en x et y. L'équation proposée pourra [322] se mettre sous la forme

$$x^m \varphi\left(\frac{y}{x}\right) dx + x^m \chi\left(\frac{y}{x}\right) dy = 0,$$

ou, en divisant par x^m, et posant $\frac{y}{x} = t$, d'où $dy = t\,dx + x\,dt$,

$$\varphi(t)\,dx + \chi(t)(t\,dx + x\,dt) = 0,$$

ou

$$[\varphi(t) + t\chi(t)]\,dx + x\chi(t)\,dt = 0,$$

équation où les variables sont séparables d'après le numéro précédent. On en tire ainsi

$$\frac{dx}{x} + \frac{\chi(t)\,dt}{\varphi(t) + t\chi(t)} = 0,$$

d'où, en posant, pour abréger,

$$T = \frac{\chi(t)}{\varphi(t) + t\chi(t)},$$

et intégrant,

$$\log x + \int T\,dt = \log C, \quad \text{ou} \quad x = Ce^{-\int T\,dt}.$$

Après l'intégration, il ne restera plus qu'à remplacer t par sa valeur $\frac{y}{x}$; ou encore on conservera la variable auxiliaire t, en joignant à l'équation précédente l'équation

$$y = Cte^{-\int T\,dt}.$$

815. On peut arriver au même résultat en posant

$$x = r\cos p, \quad y = r\sin p,$$

auquel cas on a, en divisant par r^m,

$$\varphi(\tang p)(\cos p\,dr - r\sin p\,dp) + \chi(\tang p)(\sin p\,dr + r\cos p\,dp) = 0,$$

ou, en posant

$$P = \frac{-\tang p.\varphi(\tang p) + \chi(\tang p)}{\varphi(\tang p) + \tang p.\chi(\tang p)},$$

$$\frac{dr}{r} + P\,dp = 0,$$

d'où l'on tire, comme précédemment, l'intégrale générale

$$r = Ce^{-\int P\,dp}.$$

816. *Exemples.* — 1° Soit donnée l'équation homogène

$$(x^2 - y^2)\,dy - 2xy\,dx = 0.$$

En faisant $y = tx$, et divisant par x^2, il vient

$$(1 - t^2)(x\,dt + t\,dx) - 2t\,dx = 0,$$

ou

$$\frac{(1 - t^2)\,dt}{t(1 + t^2)} - \frac{dx}{x} = 0.$$

En décomposant le multiplicateur de dt en $\frac{1}{t} - \frac{2t}{1+t^2}$, et intégrant, il vient

$$\log t - \log(1 + t^2) - \log x = \log C, \quad \text{ou} \quad \frac{t}{1+t^2} = Cx,$$

ou, en mettant pour t sa valeur $\frac{y}{x}$,

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{C}y.$$

Autrement, en employant la transformation du n° 815, et divisant par r^2, on a

$$(\cos^2 p - \sin^2 p)(\sin p\,dr + r\cos p\,dp)$$
$$- 2\cos p\sin p(\cos p\,dr - r\sin p\,dp) = 0,$$

ou, en réduisant,

$$-\sin p\,dr + r\cos p\,dp = 0;$$

en séparant les variables, on en tire

$$\frac{dr}{r} - \frac{\cos p \, dp}{\sin p} = 0, \quad \log r - \log \sin p = \log C,$$

ou enfin

$$r = C \sin p.$$

2° Soit encore l'équation

$$\left(x - \sqrt{xy} - y\right) dx + \sqrt{xy}\, dy = 0.$$

En posant $y = t^2 x$, et séparant ensuite les variables, on a

$$\frac{dx}{x} + \frac{2t^2\, dt}{1 - t - t^2 + t^3} = 0,$$

ou, en décomposant le multiplicateur de dt en

$$\frac{1}{(1-t)^2} - \frac{3}{2}\,\frac{1}{1-t} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+t},$$

et intégrant,

$$x = \frac{Ce^{-\frac{1}{1-t}}}{(1-t)\sqrt{1-t^2}}, \quad y = \frac{Ct^2 e^{-\frac{1}{1-t}}}{(1-t)\sqrt{1-t^2}}.$$

817. Une équation non homogène peut quelquefois être rendue homogène par une transformation convenable. Soit, par exemple, l'équation

$$(ax + by + c)\, dx + (a'x + b'y + c')\, dy = 0.$$

On peut faire disparaître les termes constants dans chaque parenthèse, en posant

$$x = \xi + \alpha, \quad y = \eta + \beta,$$

et déterminant les constantes α, β par les équations

$$\text{(A)} \qquad a\alpha + b\beta + c = 0, \quad a'\alpha + b'\beta + c' = 0.$$

L'équation prend alors la forme

$$(a\xi + b\eta)\, d\xi + (a'\xi + b'\eta)\, d\eta = 0,$$

d'où, en posant $\eta = t\xi$,

$$\frac{d\xi}{\xi} + \frac{(a' + b't)\, dt}{a + (a' + b)t + b't^2} = 0,$$

équation où les variables sont séparées.

Cette méthode serait en défaut si le déterminant des équations (A) était nul. En posant, dans ce cas,

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = k, \quad ax + by = u,$$

l'équation devient

$$dx + \frac{(c' + ku)\,du}{(b - ak)u + bc - ac'} = 0.$$

Si l'on avait, de plus,

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = k,$$

alors l'équation proposée pourrait s'écrire sous la forme

$$(ax + by + c)(dx + k\,dy) = 0,$$

et elle serait vérifiée soit en prenant $dx + k\,dy = 0$, d'où

$$ax + a'y + C = 0,$$

ce qui donne l'intégrale générale ; soit en prenant

$$ax + by + c = 0,$$

solution étrangère en général, intégrale particulière lorsqu'on a $a' = b$.

On aurait atteint le même but en prenant pour variables

$$u = ax + by + c, \quad v = a'x + b'y + c'.$$

818. On peut employer pour la même équation différentielle une autre transformation, qui consiste à faire disparaître x dans le coefficient de dx, et y dans le coefficient de dy, ce qui permet de séparer immédiatement les variables. Pour cela, posons

$$\xi = x + \lambda_1 y, \quad \eta = x + \lambda_2 y.$$

En substituant ces valeurs, et identifiant l'équation ainsi obtenue avec une équation de la forme

$$(g\eta + h)\,d\xi + (g'\xi + h')\,d\eta = 0,$$

on trouve les conditions

$$g + g' = a, \qquad g\lambda_2 + g'\lambda_1 = b, \qquad h + h' = c,$$
$$g\lambda_1 + g'\lambda_2 = a', \quad (g + g')\lambda_1\lambda_2 = b', \quad h\lambda_1 + h'\lambda_2 = c'.$$

On en tire d'abord

$$(g + g')(\lambda_1 + \lambda_2) = a(\lambda_1 + \lambda_2) = b + a', \quad a\lambda_1\lambda_2 = b',$$

d'où l'on conclut que λ_1 et λ_2 sont les racines de l'équation du second degré

$$a\lambda^2 - (b + a')\lambda + b' = 0.$$

Ces racines trouvées, les équations font connaître les valeurs de g, h, g', h'; etc.

819. Une équation peut quelquefois devenir homogène par rapport à x et à z, lorsqu'on pose $y = \frac{1}{z}$. Par cette transformation, elle doit prendre alors la forme

$$x^m \varphi\left(\frac{x}{z}\right) dx + x^m \chi\left(\frac{x}{z}\right) dz = 0,$$

ou, en mettant pour z sa valeur $\frac{1}{y}$,

$$x^m \varphi(xy) dx - \frac{x^m}{y^2} \chi(xy) dy = 0,$$

ou encore

$$x^{m-2}.(xy)^2 \varphi(xy) dx - x^m \chi(xy) dy = 0,$$

équation qui peut se ramener à la forme

$$\varphi(xy)\frac{dx}{x^2} + \psi(xy) dy = 0, \quad \text{ou} \quad \varphi(xy) dx + \psi(xy)\frac{dy}{y^2} = 0.$$

Exemple. — Soit l'équation

$$(a^2 + xy) dy = xy^3 dx;$$

on peut l'écrire sous la forme

$$(a^2 + xy)\frac{dy}{y^2} = xy . dx,$$

qui rentre dans le cas précédent. On posera donc

$$xy = t, \quad \text{d'où} \quad \frac{dy}{y^2} = \frac{t\,dx - x\,dt}{t^2},$$

et l'équation deviendra

$$\frac{dx}{x} - \frac{(a+t)\,dt}{at + t^2 - t^3} = 0,$$

où les variables sont séparées.

820. Soit encore l'équation

$$x^m(ay\,dx + bx\,dy) + y^n(a'y\,dx + b'x\,dy) = 0,$$

ou

$$(ax^m + a'y^n)\frac{dx}{x} + (bx^m + b'y^n)\frac{dy}{y} = 0.$$

En faisant $x^m = \xi$, $y^n = \eta$, on a

$$\frac{dx}{x} = \frac{d\xi}{m\xi}, \quad \frac{dy}{y} = \frac{d\eta}{n\eta},$$

et l'équation prend la forme homogène

$$(a\xi + a'\eta)\frac{d\xi}{m\xi} + (b\xi + b'\eta)\frac{d\eta}{n\eta} = 0.$$

821. IV. *Équations linéaires.* — On appelle *équation différentielle linéaire* du premier ordre une équation différentielle dans laquelle la fonction y et sa dérivée y' n'entrent qu'au premier degré, et sans être multipliées l'une par l'autre. La forme générale d'une telle équation est ainsi

$$(1) \qquad y' + Py = Q,$$

P et Q étant des fonctions de la seule variable x.

Pour intégrer cette équation, que l'on peut écrire

$$dy + Py\,dx = Q\,dx,$$

posons

$$(2) \qquad y = uv,$$

u et v étant des facteurs indéterminés, dont l'un peut être pris ar-

bitrairement. On en tire $dy = v\,du + u\,dv$, et l'équation proposée prend la forme

$$(3)\qquad u(dv + vP\,dx) + v\,du = Q\,dx.$$

Choisissons v de manière à faire disparaître le premier terme, en posant

$$dv + vP\,dx = 0, \quad \text{d'où} \quad v = Ae^{-\int P\,dx},$$

A étant une constante arbitraire. L'équation, réduite alors à la forme

$$v\,du = Q\,dx,$$

devient, en mettant pour v la valeur obtenue,

$$du = \frac{1}{A}e^{\int P\,dx}Q\,dx, \quad \text{d'où} \quad u = C + \frac{1}{A}\int e^{\int P\,dx}Q\,dx,$$

et, par suite, en écrivant C au lieu de AC,

$$y = e^{-\int P\,dx}\left(C + \int e^{\int P\,dx}Q\,dx\right).$$

On voit que cette expression est indépendante de la constante A, que l'on aurait pu prendre tout d'abord égale à l'unité. On pouvait le prévoir d'avance, en remarquant que le choix de v était tout à fait arbitraire, et que, pour faire disparaître le premier terme de l'équation (3), il suffisait de prendre pour v une intégrale particulière quelconque de l'équation $dv + vP\,dx = 0$.

822. On peut arriver à la même intégration par la méthode générale de la *variation des constantes arbitraires*. Considérons d'abord, au lieu de l'équation (1), l'équation *sans second membre* ou *équation linéaire homogène*

$$dy + Py\,dx = 0.$$

L'intégrale de cette équation sera

$$y = Ce^{-\int P\,dx}.$$

Cherchons maintenant à représenter l'intégrale de l'*équation complète* (1) par une expression de même forme, mais dans laquelle on remplacera la constante C par une fonction inconnue u de la variable x. Cela revient à prendre pour nouvelle inconnue y di-

visé par l'intégrale de l'équation sans second membre. Lorsqu'on viendra à différentier cette valeur

$$y = u e^{-\int \mathrm{P}\,dx},$$

les termes dans lesquels n'entrera pas la différentielle du facteur u seront les mêmes que si u était constant, de sorte qu'il s'opérera entre ces termes les mêmes réductions que dans le cas de $u = \mathrm{C}$. Or, dans ce cas, les deux termes de l'expression $dy + \mathrm{P}y\,dx$ doivent se détruire, quel que soit C. Donc, pour u variable, il ne restera de ces termes que celui qui contiendra la différentielle de u, de sorte que l'équation se réduira à

$$du \,.\, e^{-\int \mathrm{P}\,dx} = \mathrm{Q}\,dx,$$

d'où l'on tire

$$u = \mathrm{C} + \int e^{-\int \mathrm{P}\,dx} \mathrm{Q}\,dx,$$

et l'on obtient ainsi la même valeur de y que dans le numéro précédent.

Nous verrons plus tard d'autres applications de cette méthode d'intégration.

823. *Exemples.* — I. Trouver une courbe dont la sous-tangente soit à l'ordonnée comme une longueur donnée a est à la différence entre l'ordonnée et l'abscisse (*problème de de Beaune*).

On a la proportion $\mathrm{S}_t : y = a : y - x$, d'où

$$y' - \frac{y}{a} = -\frac{x}{a}.$$

Ici

$$\mathrm{P} = -\frac{1}{a}, \quad \mathrm{Q} = -\frac{x}{a}, \quad \int \mathrm{P}\,dx = -\frac{x}{a},$$

$$\int e^{\int \mathrm{P}\,dx} \mathrm{Q}\,dx = -\int e^{-\frac{x}{a}} \frac{x}{a}\,dx = \mathrm{C} + a e^{-\frac{x}{a}} \left(\frac{x}{a} + 1\right),$$

d'où

$$y = x + a + \mathrm{C} e^{\frac{x}{a}}.$$

Si l'on prend pour nouvel axe des x la droite $y = x + a$, les nouvelles coordonnées X, Y seront liées aux anciennes par les relations

$$x = \frac{\mathrm{X}}{\sqrt{2}}, \quad y = \frac{\mathrm{X}}{\sqrt{2}} + \mathrm{Y} + a,$$

et l'équation de la courbe prendra la forme plus simple

$$Y = Ce^{\frac{X}{a\sqrt{2}}}.$$

II. Soit l'équation

$$y' + \frac{1-2x}{x^2}y = 1.$$

On a ici

$$\int P\,dx = -\frac{1}{x} - \log x^2, \quad e^{\int P\,dx} = \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}, \quad \int Qe^{\int P\,dx}dx = e^{-\frac{1}{x}} + C,$$

d'où

$$y = x^2\left(1 + Ce^{\frac{1}{x}}\right).$$

III. Sommer la série

$$y = \frac{x}{1.2} + \frac{x^2}{2.3} + \dots + \frac{x^n}{n(n+1)} + \dots.$$

Comparons cette série au développement de $-\log(1-x)$ [345],

$$\log\frac{1}{1-x} = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots.$$

On a évidemment la relation

$$y + x\frac{dy}{dx} = \log\frac{1}{1-x}.$$

En intégrant cette équation, on trouve, pour l'intégrale générale,

$$y = \frac{C}{x} - \frac{1-x}{x}\left(1 + \log\frac{1}{1-x}\right).$$

On déterminera la constante d'après la condition que y s'évanouisse avec x, ce qui donne $C = 1$, et, par suite, la somme cherchée est

$$y = 1 - \frac{1-x}{x}\log\frac{1}{1-x}.$$

824. On peut ramener à la forme linéaire toute équation de la forme

$$f'(y)\frac{dy}{dx} + \varphi(x)f(y) = \chi(x),$$

en posant $f(y) = z$.

Équation de Bernoulli. — Soient P et Q deux fonctions de x, et considérons l'équation

$$y^p \frac{dy}{dx} + P y^{p+1} = Q y^q,$$

ou, en faisant $q - p = n$,

$$\frac{dy}{dx} + Py = Qy^n.$$

On peut la mettre sous la forme

$$\frac{d\frac{1}{y^{n-1}}}{dx} - (n-1)P\frac{1}{y^{n-1}} = -(n-1)Q,$$

équation qui devient linéaire lorsqu'on pose $\frac{1}{y^{n-1}} = z$, et qui donne

$$y = (1-n)^{\frac{1}{1-n}} e^{\int P\,dx} \left[C - \int e^{(1-n)\int P\,dx} Q\,dx\right]^{\frac{1}{1-n}}.$$

On aurait pu traiter l'équation de Bernoulli directement comme l'équation linéaire, soit en posant $y = uv$ et en séparant ainsi l'équation en deux autres, soit en employant la méthode de la variation des constantes arbitraires.

Exemple. — Soit l'équation

$$dy + y\,dx = xy^3\,dx.$$

Si nous appliquons la méthode de la variation des constantes arbitraires, nous aurons d'abord à intégrer l'équation $dy + y\,dx = 0$, qui donne $y = Ce^{-x}$. Substituant, dans l'équation proposée, la valeur $y = ue^{-x}$, il vient

$$e^{-x}\,du = u^3 e^{-3x}\,dx, \quad \text{ou} \quad \frac{du}{u^3} = e^{-2x} x\,dx,$$

d'où, en intégrant,

$$\frac{1}{u^2} = \left(x + \frac{1}{2}\right) e^{-2x} + C,$$

ou, à cause de $u = e^x y$,

$$\frac{1}{y^2} = x + \frac{1}{2} + Ce^{2x}.$$

825. Si l'on donne une équation de la forme

$$ax^{\alpha}y^{\beta}dy + bx^{\alpha'}y^{\beta'}dx = cx^{\alpha''}y^{\beta''}dx,$$

on peut d'abord, en divisant par $ax^{\alpha}y^{\beta''}$, la ramener à la forme

$$y^{\gamma}dy + gx^{\delta}y^{\gamma'}dx = hx^{\delta'}dx.$$

Si l'on pose maintenant

$$y^{\gamma}dy = dz, \quad \text{d'où} \quad y^{\gamma+1} = (\gamma+1)z,$$

l'équation prendra la forme

$$dz + kx^{\delta}z^{n}dx = hx^{\delta'}dx,$$

et elle deviendra linéaire si l'on a $n = 1$, c'est-à-dire $\frac{\gamma'}{\gamma+1} = 1$, ou $\beta' = \beta + 1$, c'est-à-dire si l'équation donnée rentre dans l'équation de Bernoulli.

§ II.

APPLICATION DE L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES A LA RECHERCHE DE LA FORMULE D'ADDITION DES TRANSCENDANTES.

826. Soit $\varpi(x)$ une fonction donnée de x, et désignons par $\Pi(x)$ l'intégrale $\int_a^x \varpi(x)\,dx$, prise à partir d'une limite constante a. On propose de trouver la relation qui doit exister entre trois arguments x, y, z pour que l'on ait, entre les valeurs correspondantes de la transcendante Π, la relation

$$(1) \qquad \Pi(x) + \Pi(y) = \Pi(z).$$

Pour cela, supposons z constant, et, par suite, $\Pi(z)$ égal à une constante C. En différentiant l'équation (1), on a l'équation différentielle

$$(2) \qquad \varpi(x)\,dx + \varpi(y)\,dy = 0,$$

dont l'intégrale générale s'obtient immédiatement sous la forme

$$\Pi(x) + \Pi(y) = C.$$

Supposons que, par un moyen quelconque, on ait obtenu la même

intégrale générale sous une autre forme

$$(3) \qquad F(x, y) = C'.$$

Si dans l'équation $\Pi(x) + \Pi(y) = C$ on fait $x = a$, $\Pi(x)$ s'annule et $\Pi(y)$ devient égal à C, c'est-à-dire à $\Pi(z)$, d'où $y = z$ pour $x = a$. Introduisant ces substitutions dans l'équation (3), elle devient $F(a, z) = C'$, et, par suite, on a, pour la relation cherchée entre les arguments x, y, z,

$$(4) \qquad F(x, y) = F(a, z).$$

Si l'on représente par u, v les intégrales $\Pi(x)$, $\Pi(y)$, et par

$$x = \varphi(u), \quad y = \varphi(v)$$

les fonctions inverses de ces intégrales, on aura $z = \varphi(u + v)$, $a = \varphi(0)$, et la relation (4) prendra la forme

$$(5) \qquad F[\varphi(u), \varphi(v)] = F[\varphi(0), \varphi(u + v)].$$

827. *Exemples.* — I. Si l'on définit la transcendante $\log x$ par l'équation

$$\log x = \int_1^x \frac{dx}{x},$$

considérons l'équation différentielle

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0,$$

dont l'intégrale immédiate est

$$\log x + \log y = C.$$

Si l'on écrit l'équation différentielle sous la forme

$$y\,dx + x\,dy = 0,$$

on en tirera, en intégrant,

$$xy = C',$$

d'où (en faisant $x = 1$, $y = z$),

$$C' = z, \quad xy = z, \quad \log x + \log y = \log(xy).$$

Soit $\varphi(u)$ la fonction inverse de $u = \log x$; les deux formes de l'intégrale deviendront

$$u + v = \mathrm{C}, \quad \text{et} \quad \varphi(u)\varphi(v) = \mathrm{C}'.$$

En supposant $x = \varphi(u) = 1$, d'où $u = 0$, $v = \mathrm{C}$, il vient

$$\varphi(\mathrm{C}) = \mathrm{C}', \quad \text{ou} \quad \mathrm{C} = \log \mathrm{C}'.$$

En remplaçant donc tour à tour C par $u + v$, et C′ par xy, on a la formule d'addition des transcendantes logarithmiques sous les deux formes

$$\varphi(u)\varphi(v) = \varphi(u+v), \quad \text{ou} \quad e^u . e^v = e^{u+v},$$

et

$$\log x + \log y = \log(xy).$$

II. Si l'on pose, par définition,

$$\mathrm{II}(x) = \int_0^x \frac{dx}{1+x^2},$$

l'équation différentielle

$$(\alpha) \qquad \frac{dx}{1+x^2} + \frac{dy}{1+y^2} = 0$$

aura pour intégrale

$$(\beta) \qquad \mathrm{II}(x) + \mathrm{II}(y) = \mathrm{C}.$$

On peut d'ailleurs écrire l'équation (α) sous la forme

$$\begin{aligned} 0 &= (1+y^2)\,dx + (1+x^2)\,dy \\ &= dx + dy + (x + y - x)\,y\,dx + (x + y - y)\,x\,dy \\ &= (1 - xy)\,d(x+y) - (x+y)\,d(1 - xy), \end{aligned}$$

ou, en divisant par $(1 - xy)^2$,

$$(\gamma) \qquad d\,\frac{x+y}{1-xy} = 0, \quad \text{d'où} \quad \frac{x+y}{1-xy} = \mathrm{C}'.$$

Soit maintenant $\operatorname{tang} u$ la fonction inverse de $u = \mathrm{II}(x)$. En faisant $x = 0 = \operatorname{tang} 0$, d'où $v = \mathrm{C}$, $y = \operatorname{tang} \mathrm{C}$, il vient

$$\operatorname{tang} \mathrm{C} = \mathrm{C}'.$$

Donc

$$\operatorname{tang}(u+v) = \frac{\operatorname{tang} u + \operatorname{tang} v}{1 - \operatorname{tang} u \operatorname{tang} v},$$

et, en remplaçant $\Pi(x)$ par arc tang$x$,

$$\operatorname{arc\,tang} x + \operatorname{arc\,tang} y = \operatorname{arc\,tang} \frac{x+y}{1-xy}.$$

On trouverait de la même manière la formule analogue relative aux tangentes hyperboliques.

III. Si l'on pose

$$\Pi(x) = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

l'équation différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0$$

aura pour intégrale transcendante

$$\Pi(x) + \Pi(y) = C.$$

Cherchons maintenant une intégrale algébrique de cette même équation. Pour cela, posons

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = du,$$

d'où

$$\frac{dx}{du} = \sqrt{1-x^2}, \quad \frac{dy}{du} = -\sqrt{1-y^2}.$$

En élevant au carré ces deux équations, et différentiant par rapport à la variable indépendante u, on a

$$2\frac{dx\,d^2x}{du^2} = -2x\,dx, \quad 2\frac{dy\,d^2y}{du^2} = -2y\,dy,$$

d'où

$$\frac{d^2x}{du^2} = -x, \quad \frac{d^2y}{du^2} = -y.$$

Posons maintenant

$$x+y=p, \quad x-y=q;$$

les équations précédentes donneront

$$\frac{d^2 p}{du^2} = -p, \quad \frac{d^2 q}{du^2} = -q.$$

$$\frac{dp}{du}\frac{dq}{du} = \frac{dx^2}{du^2} - \frac{dy^2}{du^2} = -pq,$$

d'où l'on tire, par division,

$$\frac{\dfrac{d^2 p}{du^2}}{\dfrac{dp}{du}\dfrac{dq}{du}} = \frac{1}{q}, \quad \text{ou} \quad \frac{d\dfrac{dp}{du}}{\dfrac{dp}{du}} = \frac{dq}{q},$$

équation connue [812 et 827, I], d'où l'on conclut

$$\frac{dp}{du} = \mathrm{A}q,$$

et l'on a de même

$$\frac{dq}{du} = \mathrm{B}p,$$

A et B étant des constantes arbitraires. En substituant à p, q, $\frac{dp}{du}$, $\frac{dq}{du}$ leurs valeurs ci-dessus, il vient

$$\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-y^2} = \mathrm{A}(x-y),$$

$$\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = \mathrm{B}(x+y),$$

équations d'où résulte entre les deux constantes la condition

$$\mathrm{AB} = -1.$$

On en tire, par addition et soustraction,

$$(a) \quad \begin{cases} \sqrt{1-x^2} = \dfrac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2}x - \dfrac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{2}y, \\ \sqrt{1-y^2} = \dfrac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2}y - \dfrac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{2}x. \end{cases}$$

Entre les équations (a) éliminons $\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2}$: il vient

$$y\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-y^2} = \frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{2}(x^2-y^2),$$

d'où

$$-\mathrm{C}' = \frac{2}{\mathrm{A}-\mathrm{B}} - \frac{2\mathrm{A}}{\mathrm{A}^2+1} = \frac{x^2-y^2}{y\sqrt{1-x^2}-x\sqrt{1-y^2}}$$
$$= -\left(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\right).$$

On a donc

$$(b) \qquad x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2} = \mathrm{C}'.$$

En faisant maintenant $\Pi(x) = u$, $\Pi(y) = v$, $x = \varphi(u)$, $y = \varphi(v)$, il vient, pour $x = 0$, $u = 0$, $v = \mathrm{C}$, $y = \varphi(\mathrm{C})$, d'où, en vertu de l'équation (b),

$$\mathrm{C}' = \varphi(\mathrm{C}) = \varphi(u+v).$$

Donc, en remplaçant φ par la notation ordinaire sin, l'équation (b) devient

$$\sin u \cos v + \sin v \cos u = \sin(u+v).$$

De même, en éliminant $\frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{2}$ entre les équations (a), il vient

$$\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2}(x^2-y^2) = x\sqrt{1-x^2}-y\sqrt{1-y^2}$$
$$= \frac{\left(x\sqrt{1-x^2}-y\sqrt{1-y^2}\right)\left(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\right)}{x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}}$$
$$= \frac{(x^2-y^2)\left(\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}-xy\right)}{x\sqrt{1-y^2}+\sqrt{1-x^2}}$$
$$= \frac{(x^2-y^2)\left(\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}-xy\right)}{\dfrac{2}{\mathrm{A}-\mathrm{B}}},$$

d'où

$$(c) \qquad xy-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} = \frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{\mathrm{A}-\mathrm{B}} = \mathrm{C}''.$$

Pour $x = 0$, $y = \sin\mathrm{C}$, il vient

$$\mathrm{C}'' = -\sqrt{1-y^2} = -\cos\mathrm{C} = -\cos(u+v).$$

Donc

$$\cos u \cos v - \sin u \sin v = \cos(u+v).$$

IV. Soit le polynôme du quatrième degré

$$f(x) = ax^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4,$$

et posons, pour abréger,

$$X = f(x), \quad Y = f(y).$$

Cherchons une intégrale algébrique de l'équation différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{dy}{\sqrt{Y}} = 0,$$

d'où dépend la propriété fondamentale de la transcendante

$$\text{H}(x) = \int_a^x \frac{dx}{\sqrt{X}}.$$

Pour cela, posons

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} = -\frac{dy}{\sqrt{Y}} = du.$$

On en tire

$$X = \frac{dx^2}{du^2}, \quad dX = 2\,\frac{dx\,d^2x}{du^2} = (4ax^3 + 3a_1x^2 + 2a_2x + a_3)\,dx,$$

d'où

$$2\,\frac{d^2x}{du^2} = 4ax^3 + 3a_1x^2 + 2a_2x + a_3,$$

et de même

$$2\,\frac{d^2y}{du^2} = 4ay^3 + 3a_1y^2 + 2a_2y + a_3,$$

$$\frac{dx^2 - dy^2}{du^2} = X - Y = a(x^4 - y^4) + a_1(x^3 - y^3) + a_2(x^2 - y^2) + a_3(x - y).$$

Si l'on pose maintenant $x + y = p$, $x - y = q$, la dernière équation devient

$$\frac{dp\,dq}{du^2} = apq\,\frac{p^2 + q^2}{2} + a_1 q\,\frac{3p^2 + q^2}{4} + a_2pq + a_3q,$$

et de l'addition des deux équations précédentes on tire

$$2\,\frac{d^2p}{du^2} = ap(p^2 + 3q^2) + \frac{3a_1}{2}(p^2 + q^2) + 2a_2p + 2a_3.$$

En éliminant $a_2p + a_3$ entre les deux dernières équations, il vient

$$2q\,\frac{d^2p}{du^2} - 2\,\frac{dp\,dq}{du^2} = 2apq^3 + a_1q^3,$$

d'où

$$\frac{2q\dfrac{dp\,d^2p}{du^2} - 2\dfrac{dp^2\,dq}{du^2}}{q^3} = \frac{d\dfrac{dp^2}{q^2}}{du^2} = 2ap\,dp + a_1\,dp,$$

et, en intégrant,

$$\frac{1}{q^2}\frac{dp^2}{du^2} = ap^2 + a_1 p + C,$$

ou, en mettant pour $\dfrac{dp}{du}$ sa valeur $\dfrac{dx}{du} + \dfrac{dy}{du} = \sqrt{X} - \sqrt{Y}$,

$$(\sqrt{X} - \sqrt{Y})^2 = (x-y)^2[a(x+y)^2 + a_1(x+y) + C'],$$

ce qui est l'intégrale algébrique de l'équation proposée.

La fonction $\Pi(x)$ contient comme cas particulier l'intégrale elliptique de première espèce

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}},$$

et de l'intégrale précédente on pourrait tirer le théorème d'addition des fonctions elliptiques. Mais, pour éviter des calculs pénibles, traitons directement l'intégrale u, ramenée à sa forme normale.

V. Pour intégrer l'équation

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-k^2y^2}} = 0,$$

posons $x = \sin\varphi$, $y = \sin\chi$, d'où, en faisant $\Delta\varphi = \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$, l'équation différentielle devient

$$\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} + \frac{d\chi}{\Delta\chi} = 0.$$

Si l'on pose

$$F(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta\varphi},$$

l'équation a pour intégrale immédiate

$$F(\varphi) + F(\chi) = C.$$

Pour obtenir une intégrale algébrique, posons

$$\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = -\frac{d\chi}{\Delta\chi} = du,$$

d'où l'on tire

$$\frac{d\varphi}{du} = \Delta\varphi, \quad \frac{d\chi}{du} = -\Delta\chi.$$

Élevant ces deux équations au carré, et différentiant, il vient

$$2\frac{d^2\varphi}{du^2} = -2k^2\sin\varphi\cos\varphi = -k^2\sin 2\varphi,$$

$$2\frac{d^2\chi}{du^2} = -2k^2\sin\chi\cos\chi = -k^2\sin 2\chi.$$

Si l'on pose $\varphi+\chi = p$, $\varphi-\chi = q$, ces équations donnent

$$\frac{d^2p}{du^2} = -\frac{1}{2}k^2[\sin(p+q)+\sin(p-q)] = -k^2\sin p\cos q,$$

et de même

$$\frac{d^2q}{du^2} = -k^2\cos p\sin q.$$

On a d'ailleurs

$$\frac{dp}{du} = \Delta\varphi - \Delta\chi, \quad \frac{dq}{du} = \Delta\varphi + \Delta\chi,$$

d'où

$$\frac{dp\,dq}{du^2} = (\Delta\varphi)^2 - (\Delta\chi)^2 = -k^2(\sin^2\varphi - \sin^2\chi)$$
$$= -k^2\sin(\varphi+\chi)\sin(\varphi-\chi) = -k^2\sin p\sin q.$$

On tire de là

$$\frac{\dfrac{d^2p}{du^2}}{\dfrac{dp\,dq}{du^2}} = \frac{\cos q}{\sin q}, \quad \text{ou} \quad \frac{\dfrac{d^2p}{du^2}}{\dfrac{dp}{du}} = \frac{\cos q\dfrac{dq}{du}}{\sin q},$$

d'où

(1) $$\frac{dp}{du} = A\sin q,$$

A étant une constante arbitraire. On trouve de même, B étant une autre constante,

(2) $$\frac{dq}{du} = B\sin p.$$

De ces deux équations on tire, en éliminant du,

$$A \sin q\,dq = B \sin p\,dp,$$

d'où, en intégrant de nouveau,

(3) $$A \cos q - B \cos p + C' = 0.$$

En mettant, dans les équations (1) et (2), pour $\frac{dp}{du}$, $\frac{dq}{du}$, leurs valeurs, on a

$$A \sin(\varphi - \chi) = \Delta\varphi - \Delta\chi,$$
$$B \sin(\varphi + \chi) = \Delta\varphi + \Delta\chi.$$

Soit maintenant σ ce que devient χ pour $\varphi = 0$. Ces équations donneront

$$-A \sin\sigma = 1 - \Delta\sigma,$$
$$B \sin\sigma = 1 + \Delta\sigma,$$

et l'équation (3), ou

(4) $$A \cos(\varphi - \chi) - B \cos(\varphi + \chi) + C' = 0,$$

donnera $C' = (B - A)\cos\sigma$, d'où

$$A = \frac{\Delta\sigma - 1}{\sin\sigma}, \quad B = \frac{\Delta\sigma + 1}{\sin\sigma}, \quad C' = \frac{2\cos\sigma}{\sin\sigma}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (4), et réduisant, on en tire

$$\cos\sigma = \cos\varphi\cos\chi - \sin\varphi\sin\chi\,\Delta\sigma.$$

Soit maintenant $\operatorname{am} u$ (amplitude de u) $= \varphi$ la fonction inverse de l'intégrale $u = F(\varphi)$. On aura

$$\chi = \operatorname{am} v, \quad \sigma = \operatorname{am}(u + v),$$

et la formule précédente deviendra

$$\cos\operatorname{am}(u + v) = \cos\operatorname{am} u \cos\operatorname{am} v - \sin\operatorname{am} u \sin\operatorname{am} v\,\Delta\operatorname{am}(u + v),$$

formule d'addition des fonctions elliptiques, d'où l'on peut tirer un grand nombre de formules analogues.

§ III.

THÉORIE DU MULTIPLICATEUR DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE.

828. Nous avons vu que, lorsque la condition

$$(1) \qquad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

est identiquement vérifiée, l'expression $M\,dx + N\,dy$ est une différentielle exacte, et qu'alors l'intégrale de l'équation différentielle

$$(2) \qquad M\,dx + N\,dy = 0$$

est

$$\int (M\,dx + N\,dy) = C.$$

Si la condition (1) n'est pas remplie, nous allons montrer qu'il existe toujours un *multiplicateur* μ, fonction de x et de y, tel que, en multipliant par ce facteur l'expression $M\,dx + N\,dy$, le produit soit une différentielle exacte.

Nous avons déjà vu des exemples de l'existence de ce facteur dans les équations où les variables sont séparables, telles que les équations de la forme [813]

$$X_1 Y\,dx + XY_1\,dy = 0,$$

dont le premier membre devient une différentielle exacte lorsqu'on le multiplie par $\frac{1}{XY}$.

Nous avons rencontré des équations dont le premier membre admet plusieurs multiplicateurs différents. Ainsi le premier membre de l'équation

$$y\,dx - x\,dy = 0$$

admet les multiplicateurs

$$\frac{1}{xy}, \quad \frac{1}{x^2}, \quad \frac{1}{y^2}, \quad \text{etc.},$$

qui donnent à ce premier membre les formes

$$d\log\frac{x}{y},\quad -d\frac{y}{x},\quad d\frac{x}{y},\quad \text{etc.}$$

829. Pour prouver l'existence générale d'un multiplicateur pour toute expression telle que $M\,dx + N\,dy$, nous nous appuierons sur le théorème, démontré dans le Chapitre précédent, § IV, que toute équation

$$(2)\qquad M\,dx + N\,dy = 0$$

admet une intégrale générale renfermant une constante arbitraire C. Si l'on suppose cette intégrale résolue par rapport à C, elle sera de la forme

$$(3)\qquad F(x, y) = C,$$

la fonction $F(x, y)$ étant au moins susceptible d'une représentation géométrique [786].

Le $\frac{dy}{dx}$ tiré de l'équation donnée (2) doit être égal, en tout point d'une quelconque des courbes (3), au $\frac{dy}{dx}$ tiré de la différentiation de l'équation (3), ce qui donne la relation

$$(4)\qquad \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{M} = \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{N}.$$

Or cette relation finie, sans constante arbitraire, déduite de l'équation différentielle et de l'intégrale générale qui lui est équivalente, doit être une identité; car, sans cela, elle exprimerait une relation entre x et y qui ne serait pas compatible avec une valeur arbitraire de y correspondante à une valeur donnée de x, comme doit l'être l'équation intégrale générale dont l'équation (4) est la conséquence.

Remarquons, en passant, que ce que nous venons de dire s'applique à toute équation finie, sans constante arbitraire, déduite de l'intégrale générale. Ainsi, *toute relation entre x et y seuls, sans constante arbitraire, déduite d'une équation* $F(x, y, C) = 0$ *renfermant une constante arbitraire, doit nécessairement se réduire à une identité.*

830. Les deux membres de l'équation (4) étant donc identiquement égaux, désignons leur valeur commune par μ. Cette quantité μ sera une fonction de x et de y, inconnue tant que l'on ne connaîtra pas un moyen d'intégrer l'équation différentielle, mais dont l'existence, du moins, est démontrée. On a, d'après cela,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \mu M, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \mu N,$$

d'où l'on tire

$$\mu(M\,dx + N\,dy) = dF.$$

Par conséquent, en multipliant par μ le premier membre de l'équation différentielle (2), on le change en une différentielle exacte.

831. En développant la condition d'intégrabilité de l'expression $\mu(M\,dx + N\,dy)$,

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x},$$

on obtient l'équation aux dérivées partielles

$$M\frac{\partial\mu}{\partial y} - N\frac{\partial\mu}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = 0,$$

qui servirait à déterminer μ, si l'on savait l'intégrer. Mais nous verrons plus tard que l'intégration de cette équation, dans le cas général, revient précisément au problème de l'intégration de l'équation (2).

On peut cependant trouver μ dans un grand nombre de cas particuliers, et la recherche du multiplicateur constitue la méthode la plus générale pour l'intégration des équations différentielles du premier ordre et du premier degré.

832. Si un multiplicateur μ rend intégrable l'expression $\mu(M\,dx + N\,dy)$, qui devient ainsi égale à du, l'équation différentielle donnée (2) se trouvera alors équivalente à

$$\frac{1}{\mu}du = 0.$$

Elle sera donc vérifiée soit en posant $du = 0$, ce qui donne l'in-

tégrale générale, soit en posant $\frac{1}{\mu} = 0$, ce qui donne une intégrale particulière, ou bien une solution singulière, ou une solution étrangère [781].

Exemples. — I. L'équation

$$y\,dx - x\,dy = 0$$

admettant pour multiplicateur $\frac{1}{xy}$, l'équation $\frac{1}{\mu} = 0$ donne $xy = 0$, ce qui est un système de deux intégrales particulières qui se tirent de l'intégrale générale $\frac{y}{x} = C$, en supposant tour à tour $C = 0$ et $C = \infty$.

II. Le multiplicateur de l'équation

$$\sqrt{y}\,.\,dx - \sqrt{x}\,.\,dy = 0$$

étant $\frac{1}{\sqrt{xy}}$, l'équation

$$\frac{1}{\mu} = \sqrt{xy} = 0$$

donne une solution singulière [789, III].

833. Une équation donnée admet une infinité de multiplicateurs. En effet, si μ est un multiplicateur de l'équation $M\,dx + N\,dy = 0$, de sorte que l'on ait

$$u = \int \mu(M\,dx + N\,dy),$$

$\varphi(u)\,du = \mu\varphi(u)(M\,dx + N\,dy)$ sera aussi une différentielle exacte, quelle que soit la fonction φ. Donc $\mu.\varphi(u)$ sera encore un multiplicateur de l'équation différentielle. L'intégrale obtenue au moyen de ce nouveau multiplicateur est la même que dans le premier cas; car il revient au même de poser $u =$ const. ou de poser $\Phi(u) =$ const., Φ désignant une fonction quelconque.

Réciproquement, si μ et μ_1 sont deux multiplicateurs de la même équation, de manière que l'on ait

$$\mu\,(M\,dx + N\,dy) = du,$$

$$\mu_1(M\,dx + N\,dy) = du_1,$$

la quantité

$$du_1 = \frac{\mu_1}{\mu} du$$

étant une différentielle exacte, il résulte d'un théorème démontré au n° 779 que $\frac{\mu_1}{\mu}$ est une fonction de u. Donc le multiplicateur μ_1 est compris dans la formule $\mu\varphi(u)$.

834. Il s'ensuit de là que, étant donnés deux multiplicateurs différents μ, μ_1 d'une même équation différentielle, on obtiendra l'intégrale générale de celle-ci en égalant à une constante arbitraire le quotient $\frac{\mu_1}{\mu}$.

Ainsi, l'équation

$$x\,dy - y\,dx = 0$$

admet comme multiplicateurs

$$\mu = \frac{1}{xy}, \quad \mu_1 = \frac{1}{x^2}.$$

Elle a donc pour intégrale générale

$$\frac{\mu_1}{\mu} = \frac{y}{x} = C.$$

835. Donnons maintenant quelques applications de la méthode du multiplicateur à l'intégration des équations différentielles.

I. Divisons l'équation (2) [828] par N, et mettons-la sous la forme

$$dy + L\,dx = 0,$$

en faisant, pour abréger, $L = \frac{M}{N}$. Cherchons dans quels cas cette équation deviendra intégrable au moyen d'un multiplicateur fonction d'une seule des variables, de x seul, par exemple.

En écrivant la condition pour que $\mu(dy + L\,dx)$ soit une différentielle exacte, il vient, μ étant indépendant de y,

$$\frac{\partial\mu}{\partial x} = \frac{\partial(\mu L)}{\partial y} = \mu\frac{\partial L}{\partial y},$$

ou

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\partial L}{\partial y}.$$

Puisque μ est une fonction de x seul, il devra en être de même de $\frac{\partial L}{\partial y}$, et, par suite, il faut que L soit de la forme

$$L = Xy + X_1,$$

X et X_1 étant des fonctions de x. Alors l'équation proposée doit être de la forme

$$dy + Xy\,dx + X_1\,dx = 0,$$

c'est-à-dire qu'elle doit être linéaire. Alors la valeur de μ sera donnée par l'équation

$$\frac{d\mu}{\mu} = X\,dx, \quad \text{d'où} \quad \mu = e^{\int X\,dx},$$

en particularisant la constante arbitraire qui devrait être en facteur, ce qui est permis, puisque évidemment la multiplication par un facteur constant n'a aucune influence sur l'intégrabilité de la fonction. Le premier membre de l'équation devient, en multipliant par μ,

$$e^{\int X\,dx}dy + ye^{\int X\,dx}X\,dx + e^{\int X\,dx}X_1\,dx,$$

d'où, en intégrant,

$$ye^{\int X\,dx} + \int e^{\int X\,dx}X_1\,dx = C,$$

ce qui nous ramène à la formule trouvée [821] pour l'intégration de l'équation linéaire.

On voit que, dans ce cas, le quotient $\frac{M}{N}$ doit être de la forme $Xy + X_1$, et le multiplicateur de l'équation $M\,dx + N\,dy = 0$ est alors $\frac{1}{N}e^{\int X\,dx}$.

Si le quotient $\frac{N}{M}$ était de la forme $Yx + Y_1$, Y et Y_1 étant des fonctions de y, on verrait de même que le multiplicateur serait $\frac{1}{M}e^{\int Y\,dy}$.

836. II. L'équation

$$(2) \qquad M\,dx + N\,dy = 0$$

peut s'écrire sous la forme

$$\frac{1}{2}(Mx + Ny)\left(\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y}\right) + \frac{1}{2}(Mx - Ny)\left(\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y}\right) = 0,$$

ou bien

$$(2)' \qquad \frac{1}{2}(Mx + Ny)\,d\log(xy) + \frac{1}{2}(Mx - Ny)\,d\log\frac{x}{y} = 0.$$

Les fonctions $Mx + Ny$, $Mx - Ny$, qui multiplient des différentielles exactes, ne peuvent être toutes les deux identiquement nulles, sans quoi M et N le seraient aussi. Examinons d'abord les cas où l'une des deux serait nulle.

1° Si $Mx + Ny$ est identiquement nul, le premier membre de l'équation se réduit à

$$\frac{1}{2}(Mx - Ny)\,d\log\frac{x}{y},$$

d'où

$$\frac{M\,dx + N\,dy}{Mx - Ny} = \frac{1}{2}\,d\log\frac{x}{y}.$$

Le second membre étant une différentielle exacte, le facteur d'intégration de l'équation (2) sera donc $\dfrac{1}{Mx - Ny}$.

2° On verrait de même que, si $Mx - Ny$ est identiquement nul, le facteur d'intégration sera $\dfrac{1}{Mx + Ny}$.

3° Supposons qu'aucune des deux quantités $Mx + Ny$, $Mx - Ny$ ne soit identiquement nulle, et divisons d'abord le premier membre de l'équation $(2)'$ par $Mx + Ny$. Il vient

$$\frac{M\,dx + N\,dy}{Mx + Ny} = \frac{1}{2}\,d\log(xy) + \frac{1}{2}\,\frac{Mx - Ny}{Mx + Ny}\,d\log\frac{x}{y} = 0.$$

Le premier membre sera une différentielle exacte si

$$\frac{Mx - Ny}{Mx + Ny}\,d\log\frac{x}{y}$$

en est une, et, par suite [779], si $\frac{Mx - Ny}{Mx + Ny}$ est une fonction de $\log\frac{x}{y}$ ou de $\frac{x}{y}$, c'est-à-dire, si $\frac{M}{N}$ est une fonction de ce rapport $\frac{x}{y}$. C'est ce qui a lieu, en particulier, lorsque M et N sont des fonctions homogènes du même degré de x et de y. Ainsi, dans le cas d'une équation homogène, le facteur d'intégration est

$$\frac{1}{Mx + Ny},$$

à moins que $Mx + Ny$ ne soit identiquement nul, auquel cas nous avons vu [1°] que le multiplicateur serait $\frac{1}{Mx - Ny}$.

4° Divisons l'équation (2)' par $Mx - Ny$, ce qui donne

$$\frac{M\,dx + N\,dy}{Mx - Ny} = \frac{1}{2}\,\frac{Mx + Ny}{Mx - Ny}\,d\log(xy) + \frac{1}{2}\,d\log\frac{x}{y} = 0.$$

Le premier membre sera intégrable si $\frac{Mx + Ny}{Mx - Ny}$ est une fonction de xy, c'est-à-dire, si le rapport $\frac{Mx}{Ny}$ est une fonction de xy, condition qui est satisfaite si l'on suppose

$$M = y\varphi(xy), \quad N = x\chi(xy).$$

Donc, dans cette hypothèse, le multiplicateur de l'équation (2) sera

$$\frac{1}{Mx - Ny},$$

sauf le cas de $Mx - Ny = 0$, dans lequel (2°) le multiplicateur est $\frac{1}{Mx + Ny}$.

Remarquons que, si l'on change y en $\frac{1}{z}$, l'équation (2) devient

$$M\,dx - N\frac{dz}{z^2} = 0,$$

où M et N sont remplacés par $M' = M$, $N' = -\frac{N}{z^2}$. On a alors

$$M' = \frac{1}{z}\,\varphi\left(\frac{x}{z}\right), \quad N' = -\frac{1}{z}\,\chi\left(\frac{x}{z}\right),$$

de sorte que le premier membre de l'équation transformée est homogène par rapport à x et à z, et l'on se trouve dans le cas traité au n° 819. On a alors

$$\frac{1}{Mx + N'z} = \frac{1}{Mx + Ny}.$$

837. *Exemples.* — I. Soit l'équation homogène

$$(x + y)\,dx - (x - y)\,dy = 0.$$

En divisant par $(x + y)x - (x - y)y = x^2 + y^2$, le premier membre devient

$$\frac{(x + y)\,dx - (x - y)\,dy}{x^2 + y^2},$$

ce qui donne, en intégrant,

$$\log\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{C} + \operatorname{arc\,tang}\frac{x}{y} = 0,$$

équation de la spirale logarithmique.

II. Soit l'équation

$$(y + xy^2)\,dx + (x - x^2y)\,dy = 0.$$

On a $\dfrac{Mx}{Ny} = \dfrac{xy + x^2y^2}{xy - x^2y^2} =$ une fonction de xy. Le multiplicateur de l'équation est donc $x(y + xy^2) - y(x - x^2y) = 2x^2y^2$, ce qui change l'équation en

$$\frac{1 + xy}{x^2y}\,dx + \frac{1 - xy}{xy^2}\,dy = 0,$$

d'où l'on tire, en intégrant,

$$\log\frac{x}{y} - \frac{1}{xy} = C.$$

838. III. On peut chercher directement dans quels cas le multiplicateur sera une fonction homogène de x et de y, ou bien une fonction de xy.

1° Si l'on suppose μ homogène du degré zéro, il sera de la forme

$$\mu = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) = \varphi(t),$$

en posant $t = \frac{y}{x}$, d'où

$$\frac{\partial t}{\partial x} = -\frac{t}{x}, \quad \frac{\partial t}{\partial y} = \frac{1}{x},$$

et l'équation aux dérivées partielles du n° 831, à laquelle doit satisfaire la fonction μ, deviendra

$$\frac{\varphi'(t)}{x}(M - Nt) + \varphi(t)\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = 0,$$

d'où

$$d \log \varphi(t) + \frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{Mx + Ny} x^2\, dt = 0.$$

Pour que cette équation subsiste, il faut que

$$\frac{x^2\left(\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}\right)}{Mx + Ny}$$

soit une fonction de t ou de $\frac{y}{x}$, c'est-à-dire une fonction homogène du degré zéro, ce qui a lieu, en particulier, lorsque M et N sont deux fonctions homogènes de même degré.

Il y a exception dans le cas de $Mx + Ny = 0$.

2° Par un calcul semblable, on verra que, pour que le multiplicateur soit une fonction homogène de degré m,

$$\mu = x^m \varphi\left(\frac{y}{x}\right) = x^m \varphi(t),$$

il faudra que l'on ait

$$d \log \varphi(t) + \frac{x^2\left(\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}\right) - m N x}{Mx + Ny}\, dt = 0.$$

On en conclut que

$$\frac{x^2\left(\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}\right) - m N x}{Mx + Ny}$$

doit être une fonction homogène du degré zéro, ce qui a encore lieu lorsque M et N sont deux fonctions homogènes de même degré.

3° On verra de même que le multiplicateur sera une fonction de xy si

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{Mx - Ny}$$

est une fonction de xy, ce qui a lieu, en particulier, lorsqu'on a

$$M = y\varphi(xy), \quad N = x\chi(xy).$$

839. IV. Appliquons la méthode du multiplicateur à l'intégration de l'équation

$$(1) \qquad ay\,dx + bx\,dy = x^m y^n (a'y\,dx + b'x\,dy),$$

a, b, a', b' étant des constantes. Pour cela cherchons, pour chacun des deux membres, la forme la plus générale de son multiplicateur, et nous verrons ensuite s'il est possible de faire coïncider ces deux formes, ce qui donnera le multiplicateur de l'équation tout entière.

L'expression $ay\,dx + bx\,dy$ devient une différentielle exacte lorsqu'on la multiplie par $\frac{1}{xy}$, et l'équation $ay\,dx + bx\,dy = 0$ a pour intégrale

$$\log(x^a y^b) = \text{const.}, \quad \text{ou} \quad x^a y^b = \text{const.}$$

Donc la forme la plus générale du multiplicateur de cette expression est [833]

$$\frac{1}{xy}\varphi(x^a y^b).$$

On verrait de même que la formule la plus générale du multiplicateur du second membre de l'équation (1) est

$$\frac{1}{x^{m+1}y^{n+1}}\chi(x^{a'}y^{b'}).$$

Pour faire coïncider ces deux formules, il faut donc choisir

les fonctions φ et χ de manière que l'on ait

$$\frac{1}{xy}\varphi(x^a y^b) = \frac{1}{x^{m+1}y^{n+1}}\chi(x^{a'}y^{b'}),$$

ou

$$x^m y^n \varphi(x^a y^b) = \chi(x^{a'}y^{b'}).$$

Cherchons à déterminer ces fonctions, en les supposant égales respectivement à des puissances de degrés indéterminés r, s, ce qui donne

$$x^m y^n (x^a y^b)^r = (x^{a'}y^{b'})^s,$$

d'où

$$ar + m = a's, \quad br + n = b's,$$

$$r = \frac{a'n - b'm}{ab' - a'b}, \quad s = \frac{an - bm}{ab' - a'b},$$

sauf le cas où l'on aurait $a : a' = b : b'$, et dans lequel l'équation (1) s'intégrerait immédiatement. D'après cela, le multiplicateur de l'équation (1) sera

$$x^{ar-1}y^{br-1} = x^{a's-m-1}y^{b's-n-1},$$

et, en faisant la multiplication, l'équation deviendra

$$x^{ar-1}y^{br-1}(aydx + bxdy) = x^{a's-1}y^{b's-1}(a'ydx + b'xdy),$$

d'où l'on tire, en intégrant,

$$\frac{1}{r}x^{ar}y^{br} = \frac{1}{s}x^{a's}y^{b's} + C.$$

840. V. Voici une autre méthode qui s'applique à l'équation précédente et à un grand nombre d'autres.

Considérons l'équation

$$Mdx + Ndy = Pdx + Qdy,$$

et supposons que l'on sache déterminer les multiplicateurs μ et ν des deux membres de cette équation, ce qui est possible toutes les fois que l'on sait intégrer séparément les deux équations

$$Mdx + Ndy = 0, \quad Pdx + Qdy = 0.$$

Soit alors

$$\mu(Mdx + Ndy) = du, \quad \nu(Pdx + Qdy) = dv;$$

l'équation proposée deviendra

$$du = \frac{\mu}{\nu}\,dv, \quad \text{ou} \quad \nu\,du - \mu\,dv = 0,$$

et, si l'on exprime x et y en fonction de u et de v, on obtiendra, par la substitution de ces valeurs dans μ et dans ν, une équation différentielle entre u et v qui pourra rentrer dans un des cas que l'on sait intégrer.

Exemples. — 1° Appliquons cette méthode à l'équation du numéro précédent. On a dans ce cas

$$\mu = \frac{1}{xy}, \quad \nu = \frac{1}{x^{m+1}y^{n+1}},$$

et, en représentant les différentielles

$$\mu(M\,dx + N\,dy), \quad \nu(P\,dx + Q\,dy)$$

par $\frac{du}{u}$, $\frac{dv}{v}$, on aura

$$u = x^a y^b, \quad v = x^{a'} y^{b'}.$$

L'équation différentielle devient alors

$$\frac{du}{u} = \frac{\mu}{\nu}\frac{dv}{v} = x^m y^n \frac{dv}{v}.$$

Or, en résolvant les équations

$$a\log x + b\log y = \log u, \quad a'\log x + b'\log y = \log v,$$

il vient

$$\log x = \frac{b'\log u - b\log v}{ab' - a'b}, \quad \log y = \frac{a\log v - a'\log u}{ab' - a'b},$$

d'où, en faisant, pour abréger,

$$r = \frac{a'n - b'm}{ab' - a'b}, \quad s = \frac{an - bm}{ab' - a'b},$$

on tire

$$\log(x^m y^n) = -r\log u + s\log v, \quad x^m y^n = u^{-r} v^s,$$

et l'équation différentielle devient

$$u^{r-1}\,du = v^{s-1}\,dv,$$

dont l'intégrale est

$$\frac{u^r}{r} = \frac{v^s}{s} + C, \quad \text{etc.}$$

2° Soit l'équation

$$x^2y^2(dx - b\,dy) + a(y\,dx - x\,dy) = 0.$$

En multipliant respectivement les deux termes de cette équation par

$$\mu = \frac{1}{x^2y^2}, \quad \nu = \frac{1}{xy},$$

on obtient les différentielles

$$du = dx - b\,dy, \quad \frac{dv}{v} = \frac{dx}{x} - \frac{dy}{y},$$

d'où l'on tire

$$u = x - by, \quad v = \frac{x}{y}.$$

L'équation différentielle devient alors

$$\frac{1}{\mu}\,du + \frac{a}{\nu}\,\frac{dv}{v} = 0,$$

c'est-à-dire

$$xy\,du + a\frac{dv}{v} = 0.$$

Or on a

$$x = \frac{uv}{v-b}, \quad y = \frac{u}{v-b}, \quad \text{d'où} \quad xy = \frac{u^2v}{(v-b)^2},$$

et l'équation différentielle devient

$$u^2du + \frac{a(v-b)^2}{v^2}\,dv = 0,$$

d'où l'on tire

$$\frac{u^3}{3} + a\left(v - \frac{b^2}{v}\right) - 2ab\log v = C, \quad \text{etc.}$$

841. VI. L'équation que nous venons d'intégrer est un cas particulier de l'équation plus générale

$$M\,dx + N\,dy + P(y\,dx - x\,dy) = 0,$$

dans laquelle M et N sont deux fonctions homogènes du même

degré m, et P une fonction homogène du degré n. Si l'on fait

$$M = x^m \varphi\left(\frac{y}{x}\right), \quad N = x^m \chi\left(\frac{y}{x}\right), \quad P = x^n \psi\left(\frac{y}{x}\right), \quad \text{puis} \quad \frac{y}{x} = t,$$

l'équation devient

$$x^m \varphi(t)\, dx + x^m \chi(t)(x\, dt + t\, dx) + x^{n+2} \psi(t)\, dt = 0,$$

ou

$$\frac{dx}{dt} + x \frac{\chi(t)}{\varphi(t) + t\chi(t)} + x^{n-m+2} \frac{\psi(t)}{\varphi(t) + t\chi(t)} = 0,$$

équation de Bernoulli [824], qui serait linéaire si l'on avait

$$m = n + 2.$$

En appliquant cette transformation au second exemple du numéro précédent, il vient

$$x^4 t^2\, dx - bt\, dx - bx\, dt + a x^2\, dt = 0,$$

ou

$$\frac{dx}{dt} - \frac{bx}{1 - bt} + \frac{a}{t^2(1 - bt)} x^{-2} = 0,$$

ou enfin

$$\frac{d.x^3}{dt} - \frac{3b}{1 - bt} x^3 = -\frac{3a}{t^2(1 - bt)},$$

dont l'intégrale est

$$x^3 = \frac{1}{(bt - 1)^3}\left[C + 3a\left(b^2 t - \frac{1}{t}\right) - 2ab \log t\right].$$

842. On peut ramener au cas que nous venons de traiter l'équation suivante, connue sous le nom d'*équation de Jacobi* :

$$(a + a'x + a''y)(x\, dy - y\, dx) - (b + b'x + b''y)\, dy + (c + c'x + c''y)\, dx = 0.$$

Il suffira, pour cela, de faire disparaître les termes constants dans les parenthèses et de ramener l'équation à la forme

$$(A'\xi + A''\eta)(\xi\, d\eta - \eta\, d\xi) - (B'\xi + B''\eta)\, d\eta + (C'\xi + C''\eta)\, d\xi = 0,$$

en posant

$$x = \xi + \frac{\beta}{\alpha}, \quad y = \eta + \frac{\gamma}{\alpha},$$

$\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\gamma}{\alpha}$ étant deux indéterminées. Si l'on substitue ces valeurs dans l'équation donnée, elle devient

$$\begin{aligned}
&(a'\xi + a''\eta)(\xi d\eta - \eta d\xi) \\
&+\left[\frac{a\alpha + a'\beta + a''\gamma}{\alpha}\cdot\xi + \frac{\beta}{\alpha}(a'\xi + a''\eta) - b'\xi - b''\eta\right]d\eta \\
&-\left[\frac{a\alpha + a'\beta + a''\gamma}{\alpha}\cdot\eta + \frac{\gamma}{\alpha}(a'\xi + a''\eta) - c'\xi - c''\eta\right]d\xi \\
&+\left[\frac{a\alpha + a'\beta + a''\gamma}{\alpha}\cdot\frac{\beta}{\alpha} - \frac{b\alpha + b'\beta + b''\gamma}{\alpha}\right]d\eta \\
&-\left[\frac{a\alpha + a'\beta + a''\gamma}{\alpha}\cdot\frac{\gamma}{\alpha} - \frac{c\alpha + c'\beta + c''\gamma}{\alpha}\right]d\xi = 0.
\end{aligned}$$

En égalant à zéro les coefficients des deux dernières lignes, il vient

$$\frac{a\alpha + a'\beta + a''\gamma}{\alpha} = \frac{b\alpha + b'\beta + b''\gamma}{\beta} = \frac{c\alpha + c'\beta + c''\gamma}{\gamma}.$$

Si l'on représente par λ la valeur commune de ces trois rapports, on aura les trois équations

$$\begin{aligned}
(a-\lambda)\alpha + a'\beta + a''\gamma &= 0, \\
b\alpha + (b'-\lambda)\beta + b''\gamma &= 0, \\
c\alpha + c'\beta + (c''-\lambda)\gamma &= 0,
\end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$R \quad \begin{vmatrix} a-\lambda & a' & a'' \\ b & b'-\lambda & b'' \\ c & c' & c''-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation étant résolue, on aura α, β, γ par les proportions

$$\alpha:\beta:\gamma = \frac{\partial R}{\partial a} : \frac{\partial R}{\partial a'} : \frac{\partial R}{\partial a''} = \ldots.$$

§ IV.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE ET D'UN DEGRÉ SUPÉRIEUR AU PREMIER PAR RAPPORT A $\frac{dy}{dx}$. — INTÉGRATION PAR DIFFÉRENTIATION.

843. Lorsqu'une équation primitive est du premier degré par rapport à la constante arbitraire, comme l'équation

$$u + Cv = 0,$$

u et v étant des fonctions de x et de y, l'élimination de cette constante conduit immédiatement à une équation

$$\frac{du}{u} = \frac{dv}{v},$$

du premier degré par rapport à $\frac{dy}{dx}$.

Mais, si l'équation primitive

$$(1) \qquad F(x, y, C) = 0$$

contient la constante arbitraire sous une forme quelconque, alors l'élimination de C entre cette équation et sa différentielle conduira généralement à une équation

$$(2) \qquad \left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

qui ne sera pas du premier degré par rapport à $\frac{dy}{dx}$, lorsqu'on l'aura délivrée des radicaux.

Si nous supposons l'équation (1) résolue par rapport à C, elle fournira pour cette constante différentes valeurs en fonction de x et de y,

$$(3) \qquad C_1 = u_1, \quad C_2 = u_2, \quad \ldots,$$

et chacune de ces équations, *qui n'auront pas lieu à la fois*, mais dont une seule pourra être vérifiée dans chaque hypothèse, don-

nera une équation différentielle

$$(4)\qquad \frac{dy}{dx}-p_1=0,\quad \frac{dy}{dx}-p_2=0,\quad \ldots.$$

On peut grouper toutes les équations (3) sous la forme d'une seule équation, en égalant à zéro le produit des quantités qui s'annulent en vertu de ces équations, ce qui donne l'équation

$$(5)\qquad (C_1-u_1)(C_2-u_2)\ldots=0,$$

qui est équivalente à l'équation (1). Comme un seul des facteurs doit s'annuler, les fonctions u_1, u_2, ... ne pouvant, en général, rester constantes en même temps, il importe peu de désigner, dans ces divers facteurs, les constantes arbitraires par la même notation ou par des notations différentes; de sorte que, au lieu de l'équation (5), on peut prendre l'équation équivalente

$$(6)\qquad (C-u_1)(C-u_2)\ldots=0.$$

Cette dernière forme a sur la précédente (5) l'avantage de pouvoir se simplifier par des réductions, ce qui ramène à l'équation (1).

Cela revient à considérer les diverses séries de courbes représentées par les équations (3), séries qui seront tout aussi complètement représentées si, au lieu de désigner les constantes arbitraires par C_1, C_2, ..., on les désigne toutes par le même symbole C. Lorsqu'on fait le produit (5) des équations

$$u_1-C_1=0,\quad u_2-C_2=0,\quad \ldots,$$

si l'on établit entre C_1, C_2, ... une relation quelconque, celle d'égalité par exemple, cela revient à associer ces diverses courbes de certaines manières; mais, en donnant à C toutes les valeurs possibles, la série des groupes comprendra toutes les séries particulières représentées par les équations (3).

Ainsi les intégrales des équations (4), auxquelles équivaut l'équation (2), seront aussi complétement représentées par l'équation (6) que par les équations (3) ou par l'équation équivalente (5). On peut s'en rendre compte en considérant la représentation géométrique que nous avons indiquée au n° 786. Ici la surface représentée par l'équation (1), et dont l'ordonnée est C, se composera

de plusieurs nappes, et l'on obtiendra l'ensemble de toutes les lignes de niveau de la surface soit en menant une série unique de plans horizontaux dont chacun coupe les diverses nappes, soit en coupant séparément chaque nappe par une série particulière de plans horizontaux.

844. Réciproquement, étant donnée l'équation différentielle (2), pour l'intégrer, on commencera par la décomposer en facteurs du premier degré par rapport à $\frac{dy}{dx}$, en la mettant sous la forme

$$\left(\frac{dy}{dx} - p_1\right)\left(\frac{dy}{dx} - p_2\right)\ldots = 0,$$

ce qui revient à poser les équations (4). Si l'on intègre celles-ci séparément, et qu'on suppose les intégrales mises sous la forme (3), on pourra réunir ces intégrales sous la forme (5), ou, ce qui revient au même, sous la forme (6).

Exemples. — I. Soit donnée l'équation différentielle

$$a^2 y'^2 - xy = 0.$$

On en tire pour y' les deux valeurs

$$y' = +\frac{1}{a}\sqrt{xy}, \quad y' = -\frac{1}{a}\sqrt{xy},$$

qui correspondent aux intégrales

$$\sqrt{y} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{3a} - C = 0, \quad \sqrt{y} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{3a} - C = 0.$$

Le produit de ces deux équations se présente sous la forme plus simple

$$(\sqrt{y} - C)^2 - \frac{x^3}{9a^2} = 0.$$

II. Soit l'équation

$$a_0 y'^n + a_1 y'^{n-1} + \ldots + a_n = 0,$$

$a_0, a_1, \ldots, a_n$ étant des constantes. Si l'on désigne par $p_1, p_2, \ldots, p_n$ les n racines constantes de cette équation, on verra qu'elle

équivaut aux n équations différentielles

$$y'-p_1=0,\quad y'-p_2=0,\quad \ldots,\quad y'-p_n=0,$$

dont les intégrales sont

$$y-p_1x-C=0,\quad y-p_2x-C=0,\quad \ldots,\quad y-p_nx-C=0,$$

ou

$$\frac{y-C}{x}-p_1=0,\quad \frac{y-C}{x}-p_2=0,\quad \ldots,\quad \frac{y-C}{x}-p_n=0.$$

Si l'on fait le produit de ces équations, on obtiendra un polynôme qui ne sera autre chose que ce que devient le premier membre de l'équation proposée, lorsqu'on y remplace y' par $\frac{y-C}{x}$, c'est-à-dire

$$a_0\left(\frac{y-C}{x}\right)^n+a_1\left(\frac{y-C}{x}\right)^{n-1}+\ldots+a_n=0.$$

845. Il y a des cas où l'on peut intégrer l'équation différentielle (2) sans avoir besoin de la résoudre par rapport à $\frac{dy}{dx}$.

1° Supposons que l'équation ne contienne qu'une seule des variables x, y, par exemple x, de sorte que l'on ait

$$f(x, y')=0.$$

Si l'on peut résoudre l'équation par rapport à x, elle deviendra

(1) $$x=\varphi(y'),$$

d'où l'on tire, en différentiant, et remarquant que $dx=\frac{dy}{y'}$,

$$dy=y'\varphi'(y')\,dy',$$

et, en intégrant,

(2) $$y=\int y'\varphi'(y')\,dy'+C.$$

L'élimination de y' entre les équations (1) et (2) donnera l'intégrale cherchée.

De même, de l'équation

$$f(y, y')=0,$$

résolue par rapport à y et mise sous la forme

(3) $$y = \chi(y'),$$

on tire, à cause de $dy = y'dx$,

$$dx = \frac{\chi'(y')}{y'}dy',$$

d'où

(4) $$x = \int \frac{\chi'(y')}{y'}dy' + C,$$

équation qui, combinée avec (3), donnera l'intégrale demandée.

Exemples. — I. De l'équation

$$x = 1 + y'^3,$$

on tire

$$dy = 3y'^3dy', \quad y = \frac{3}{4}y'^4 + C,$$

d'où, en éliminant y',

$$\left[\frac{4}{3}(y - C)\right]^3 - (x - 1)^4 = 0.$$

On aurait pu aussi obtenir ce résultat en mettant l'équation proposée sous la forme

$$dy = (x - 1)^{\frac{1}{3}}dx.$$

II. Soit l'équation

$$y = y'^2 + 2y'^3.$$

On en tire

$$dx = 2dy' + 6y'dy', \quad x = 2y' + 3y'^2 + C, \quad \text{etc.}$$

846. 2° Une équation de la forme

$$x\varphi(y') + y\chi(y') = \psi(y')$$

peut se changer, par différentiation, en une équation linéaire soit par rapport à x et à $\frac{dx}{dy'}$, soit par rapport à y et à $\frac{dy}{dy'}$, comme on peut s'en assurer immédiatement en différentiant et éliminant soit y, soit x.

Exemple. — Soit l'équation

$$x + yy' = ay'^2.$$

Elle donne, en différentiant,

$$dx + y'dy + y\,dy' = 2ay'dy'.$$

En éliminant y et dy, il vient

$$dx + y'^2 dx + \frac{ay'^2 - x}{y'}dy' = 2ay'dy',$$

ou

$$\frac{dx}{dy'} - \frac{x}{y'(1+y'^2)} = \frac{ay'}{1+y'^2},$$

dont l'intégrale est [821]

$$x = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\left[C + a\log\left(y' + \sqrt{1+y'^2}\right)\right],$$

ce qui donne

$$y = ay' - \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}\left[C + a\log\left(y' + \sqrt{1+y'^2}\right)\right].$$

On serait arrivé au même résultat en éliminant x et dx.

847. 3° *Équation de Clairaut.* — Comme cas particulier de l'équation du numéro précédent, considérons l'équation

$$(1)\qquad y = xy' + f(y').$$

On en tire, en différentiant,

$$[x + f'(y')]\frac{dy'}{dx} = 0,$$

ce qui donne les deux solutions

$$(2)\qquad x + f'(y') = 0,$$

$$(3)\qquad \frac{dy'}{dx} = 0, \quad \text{d'où} \quad y' = C.$$

Cette dernière solution, combinée avec (1), donne l'intégrale générale

$$(4)\qquad y = Cx + f(C).$$

L'autre équation, qui donne pour y' une valeur variable, et qui, par conséquent, ne peut rentrer dans l'intégrale générale, est une solution singulière.

Exemples. — I. L'équation

$$(xy'-y)\sqrt{1+y'^2}=ay', \quad \text{ou} \quad y=y'x-\frac{ay'}{\sqrt{1+y'^2}},$$

donne, en différentiant,

$$o=\left[x-\frac{a}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\right]dy',$$

d'où l'on tire d'abord

$$dy'=o, \quad y'=C,$$

et par suite

$$y=Cx-\frac{aC}{\sqrt{1+C^2}};$$

puis, en égalant à zéro l'autre facteur,

$$x=\frac{a}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \text{d'où} \quad y'=x^{-\frac{1}{3}}\sqrt{a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}}, \quad \text{etc.}$$

II. Nous avons trouvé [689], pour l'équation différentielle des lignes de courbure d'une surface à centre du second degré,

$$xy(A+By'^2)-(Ax^2+By^2+K)y'=o.$$

Si l'on pose $x^2=\xi$, $y^2=\eta$, $\frac{d\eta}{d\xi}=\eta'$, l'équation, résolue par rapport à η, prend la forme

$$(A) \qquad \eta=\eta'\xi+\frac{K\eta'}{A-B\eta'},$$

équation de Clairaut, dont l'intégrale générale est, en remettant pour ξ et η leurs valeurs,

$$y^2=Cx^2+\frac{KC}{A-BC}.$$

On a la solution singulière, en éliminant η' entre l'équation (A) et sa dérivée par rapport à η',

$$o=\xi+\frac{KA}{(A-B\eta')^2}.$$

848. Étant données deux équations de la forme

$$(1)\qquad \varphi(x, y, y') = C, \quad \chi(x, y, y') = C',$$

si leur différentiation conduit à une même équation différentielle du second ordre

$$(2)\qquad \psi(x, y, y', y'') = 0,$$

il s'ensuivra de là que les équations (1) sont deux intégrales premières de l'équation (2), dont on obtiendra l'intégrale générale en éliminant y' entre ces équations (1). Si l'on égale à zéro une fonction quelconque des premiers membres φ et χ des équations (1), l'équation obtenue

$$(3)\qquad \Pi[\varphi(x, y, y'), \chi(x, y, y')] = 0$$

pourra remplacer l'une des équations (1), la seconde, par exemple, dans laquelle la constante C' serait particularisée et déterminée au moyen de C par la condition

$$(4)\qquad \Pi(C, C') = 0.$$

En éliminant donc y' entre l'équation $\varphi = C$ et l'équation (3), on aura l'intégrale de (2), dans laquelle il ne restera plus, en vertu de (4), qu'une seule constante arbitraire. On aura donc une équation primitive, satisfaisant à l'équation du premier ordre (3), et ne renfermant qu'une constante arbitraire. Ce sera donc l'intégrale générale de (3).

Si donc, étant donnée une équation différentielle $f(x, y, y') = 0$, on peut la mettre sous la forme (3), où $\varphi = C$ et $\chi = C'$ conduisent par la différentiation à une même équation différentielle du second ordre, on aura l'intégrale générale de l'équation proposée en éliminant y' entre cette équation et l'une des équations (1).

Exemples. — I. Reprenons l'équation de Clairaut

$$y = xy' + f(y').$$

On peut la mettre sous la forme

$$y - xy' = f(y'),$$

et, comme chacune des équations

$$(a)\qquad y - xy' = C,\quad f(y') = C'$$

conduit, par la différentiation, à la même équation du second ordre $dy' = 0$, on en conclut que les équations (a) sont les intégrales premières d'une même équation différentielle. On aura donc l'intégrale générale, en éliminant y' entre l'équation proposée et l'une des équations (a), la seconde par exemple, qui donne

$$y' = C'',\quad \text{d'où}\quad y = C''x + f(C''),$$

comme nous l'avions trouvé plus haut.

II. Soit l'équation

$$(b)\qquad y\sqrt{1+y'^2} = f(x+yy').$$

Les deux équations

$$y\sqrt{1+y'^2} = C,\quad f(x+yy') = C',$$

étant différentiées, donnent

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}(1+y'^2+yy'') = 0,\quad f'(x+yy')(1+y'^2+yy'') = 0.$$

Elles satisfont donc l'une et l'autre à l'équation du second ordre

$$1+y'^2+yy'' = 0.$$

L'équation $f(x+yy') = C'$ donne

$$x+yy' = C'',\quad y' = \frac{C''-x}{y},$$

et, en substituant cette valeur dans l'équation proposée, on a l'intégrale générale

$$\sqrt{(x-C'')^2+y^2} = f(C'').$$

On aurait pu intégrer la même équation (b) en procédant comme nous l'avons fait [847] pour l'équation de Clairaut. La différentiation donne

$$(c)\qquad \left[\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} - f'(x+yy')\right](1+y'^2+yy'') = 0.$$

En égalant à zéro le second facteur, on a

$$dx + y'\,dy + y\,dy' = 0,$$

d'où $x - C + yy' = 0$, ce qui conduit au même calcul que tout à l'heure.

Remarquons que, en égalant à zéro le facteur

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} - f'(x + yy')$$

de l'équation (c), et éliminant y' entre l'équation obtenue et l'équation (b), on trouvera la solution singulière de l'équation (b), que l'autre méthode ne faisait pas connaître.

849. On peut encore intégrer des équations différentielles par diverses transformations particulières.

I. Soit, par exemple, l'équation

$$\frac{y - xy'}{\sqrt{1 - y'^2}} = f(\sqrt{x^2 + y^2}).$$

En posant

$$x = r\cos p, \quad y = r\sin p,$$

l'équation devient

$$-\frac{r^2}{\sqrt{r^2 + \frac{dr^2}{dp^2}}} = f(r),$$

d'où l'on tire

$$p + C = \int \frac{f(r)\,dr}{r\sqrt{r^2 - [f(r)]^2}}.$$

Cette équation différentielle est celle qui exprime que la longueur

$$\frac{y - xy'}{\sqrt{1 + y'^2}} = y\frac{dx}{ds} - x\frac{dy}{ds}$$

de la perpendiculaire abaissée de l'origine des coordonnées sur la tangente est une fonction donnée du rayon vecteur.

On peut intégrer de la même manière l'équation

$$\frac{y - xy'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \sqrt{x^2 + y^2}\, f\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right).$$

II. Soit donnée l'équation

$$y'^k = ax^m + by^n.$$

Cherchons à la rendre homogène en posant

$$x = \xi^\mu, \quad y = \eta^\nu.$$

L'équation devient alors

$$\left(\frac{\nu}{\mu}\frac{\eta^{\nu-1}}{\xi^{\mu-1}}\right)^k \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^k = a\xi^{\mu m} + b\eta^{\nu n}.$$

Pour que cette équation soit homogène, il faut que l'on ait la double condition

$$k(\nu - \mu) = \mu m = \nu n,$$

d'où, en éliminant $\frac{\nu}{\mu} = \frac{m}{n}$,

$$k\left(\frac{m}{n} - 1\right) = m, \quad \text{ou} \quad k = \frac{mn}{m-n}.$$

§ V.

SOLUTIONS SINGULIÈRES DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE.

850. Nous avons vu (Chap. I, § II) que l'on entend par *solution singulière* d'une équation différentielle du premier ordre une relation entre les variables x, y, sans constante arbitraire, qui ne peut pas se déduire de l'intégrale générale en particularisant la constante arbitraire, et qui donne cependant, pour la dérivée $\frac{dy}{dx}$, une valeur en x et y satisfaisant à l'équation différentielle, en vertu de cette relation elle-même.

En employant le langage géométrique, une solution singulière est l'*enveloppe* de la série de courbes représentée par l'intégrale générale de l'équation différentielle, c'est-à-dire une courbe rencontrant tangentiellement toutes les enveloppées [1] et coïncidant avec le lieu de leurs intersections successives [582].

(1) Du moins entre certaines limites [588, III].

Si l'on construit la surface dont les lignes de niveau ont pour projections les enveloppées [786], l'enveloppe est le contour apparent de cette surface relativement au plan des xy. Voyons comment, en partant de ce dernier point de vue, on peut déterminer la solution singulière d'une équation différentielle dont on connaît l'intégrale générale.

851. Soit

$$F(x, y, C) = 0 \tag{1}$$

l'intégrale générale de l'équation différentielle

$$f(x, y, y') = 0, \tag{2}$$

et supposons d'abord que l'équation (1), si elle est algébrique, soit préparée de manière à ne contenir ni radicaux ni dénominateurs en x, y, C; et, si cette équation n'est pas algébrique, admettons que son premier membre jouisse, comme les fonctions sinus, cosinus et les exponentielles, de toutes les propriétés d'une fonction entière indépendantes du degré d'une telle fonction, c'est-à-dire qu'elle ne devienne infinie, non plus que ses dérivées partielles, pour aucun système de valeurs finies de x, y, C.

Le cylindre circonscrit à la surface (1), et dont les génératrices sont parallèles à l'axe des C, est déterminé par la condition qu'en chaque point de la courbe de contact avec la surface la normale commune à cette surface et au cylindre est perpendiculaire à l'axe des C. Donc le cosinus de l'angle que fait cette normale avec l'axe des C est nul, c'est-à-dire que l'on a

$$\frac{\dfrac{\partial F}{\partial C}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial F}{\partial C}\right)^2}} = 0. \tag{3}$$

D'après l'hypothèse que nous avons faite sur la forme de la fonction F, les deux dérivées partielles $\dfrac{\partial F}{\partial x}$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ ont des valeurs finies. Donc l'équation (3) ne peut avoir lieu que si l'on a

$$\frac{\partial F}{\partial C} = 0. \tag{4}$$

Cette dernière équation, jointe à l'équation (1), déterminera la courbe de contact de la surface et du cylindre parallèle à l'axe des C. Si l'on élimine C entre ces deux équations, l'équation entre x et y que l'on obtiendra sera celle du cylindre circonscrit qui projette la courbe de contact sur le plan des xy.

Le plan tangent à la surface et au cylindre en un point M de la courbe de contact contient à la fois la tangente à la courbe de contact et la tangente à la courbe de niveau qui passe par ce point. La trace de ce plan tangent sur le plan des xy sera la projection commune de ces deux tangentes, et, par conséquent, touchera à la fois la projection de la courbe de contact et celle de la courbe de niveau. Donc le contour apparent de la surface (1) est tangent, en chacun de ses points, à celle des enveloppées (1) qui passe par ce point.

Or la tangente à l'enveloppée qui passe au point (x, y) a pour coefficient angulaire la valeur de y' tirée de l'équation différentielle (2). Donc la valeur de y' tirée de l'équation de l'enveloppe est égale, pour chaque système de valeurs de x et de y satisfaisant à l'équation de l'enveloppe, à la valeur de y' tirée de l'équation (2), c'est-à-dire que l'équation de l'enveloppe donne une solution de l'équation (2).

La courbe de contact n'étant pas, en général, une courbe de niveau, l'équation de l'enveloppe ne se confondra généralement avec l'équation d'aucune des enveloppées et ne pourra se déduire de l'équation (1) par aucune particularisation de la constante C. Donc cette solution de l'équation (2) ne rentre pas dans l'intégrale générale, et, pour cette raison, on lui donne le nom de *solution singulière*.

Remarquons que l'égalité des valeurs de y' en x et y, tirées de l'équation différentielle (2) et de l'équation de l'enveloppe différentiée, n'a lieu que pour les points de l'enveloppe. Ces deux valeurs de y' ne sont pas généralement identiques; elles deviennent seulement égales *en vertu de l'équation de l'enveloppe*.

852. Si l'on suppose maintenant l'équation (1) mise sous une forme telle que $\frac{\partial F}{\partial C}$ ne puisse plus s'annuler, comme cela arrive, par exemple, lorsque l'équation est résolue par rapport à C et

mise sous la forme

$$C = \varphi(x, y),$$

l'expression du cosinus de l'angle de la normale avec l'axe des C en chaque point de la surface, ne dépendant pas, évidemment, des transformations que l'on peut faire subir à cette équation, doit conserver dans tous les cas la même valeur, et, par suite, l'équation (3) continuera à subsister pour tous les points de l'enveloppe. Mais alors, le numérateur ne pouvant plus s'annuler, il faut que le dénominateur devienne infini, ce qui donne la condition

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 = \infty,$$

laquelle entraîne l'une au moins des deux conditions

$$(5) \qquad \frac{\partial F}{\partial x} = \infty, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \infty.$$

Généralement l'une de ces conditions est la conséquence de l'autre; en effet, le coefficient angulaire de la tangente au contour apparent a pour valeur

$$-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}.$$

Ce coefficient angulaire ne pouvant être, en général, ni nul ni infini en tout point de l'enveloppe, il faut, si l'un des deux termes du rapport est infini, que l'autre le soit pareillement. Il y a exception dans le seul cas où l'enveloppe se réduit à une droite parallèle à l'un des axes coordonnés.

Si donc l'équation (1) est mise sous une forme telle qu'on ne puisse plus satisfaire à l'équation (4), alors cette dernière devra être remplacée par les équations (5), qui sont généralement équivalentes.

Il pourrait se faire que la transformation apportée à l'équation (1) ne fît perdre à l'équation (4) qu'une partie de ses solutions. Alors, pour retrouver les solutions perdues, on ferait usage successivement du système (1) et (4) et du système (1) et (5).

853. Remarquons encore que l'on a, en un point quelconque de la surface (1),

$$\frac{\partial C}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial C}}, \quad \frac{\partial C}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial C}}.$$

Or, si l'on suppose la fonction F entière et rationnelle (ou jouissant de propriétés analogues à celles des fonctions entières et rationnelles), les trois dérivées partielles de F ne pouvant s'évanouir simultanément que par exception, la condition $\frac{\partial F}{\partial C} = 0$, qui a lieu en tout point de la ligne de contact, entraînera les conditions

$$(6) \qquad \frac{\partial C}{\partial x} = \infty, \quad \frac{\partial C}{\partial y} = \infty,$$

dont l'une est généralement la conséquence de l'autre.

Ces équations (6) peuvent encore se déduire de la condition que le plan tangent à la surface (1) soit, en chaque point de la courbe de contact, parallèle à l'axe des C. En effet, l'équation du plan tangent

$$\zeta - C = \frac{\partial C}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial C}{\partial y}(\eta - y)$$

ne peut être indépendante de ζ que moyennant les conditions (6) ou au moins l'une d'elles. Si une seule est vérifiée, le plan tangent est constamment parallèle au plan des zy ou à celui des zx, et l'enveloppe se réduit à une parallèle à l'un des axes coordonnés.

Nous avons vu [583 et suivants] d'autres méthodes pour obtenir la solution singulière comme enveloppe des courbes représentées par l'intégrale générale. Nous ne reviendrons pas sur les diverses remarques que nous avons présentées dans ces articles.

854. La condition nécessaire et suffisante pour que la courbe, obtenue en substituant dans l'équation (1) la valeur de C tirée de l'équation (3), satisfasse à l'équation différentielle dont (1) est l'intégrale générale est que la valeur de y', tirée de (1) dans l'hypothèse de C constant, soit la même que la valeur tirée de la même équation dans l'hypothèse de C variable. Il faut donc que les deux

valeurs

$$y' = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}, \quad y' = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} - \frac{\frac{\partial F}{\partial C}\frac{dC}{dx}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

soient égales pour tous les points de l'enveloppe, ce qui exige que l'on ait pour tous ces points (en exceptant le cas où l'on a $y' = \infty$)

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial C}\frac{dC}{dx}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = 0.$$

Si on laisse de côté la solution $\frac{dC}{dx} = 0$, on voit que la condition nécessaire pour que cette équation soit vérifiée est

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial C}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = 0,$$

et, si $\frac{\partial F}{\partial y}$ ne peut être supposé infini, cette condition se réduit à $\frac{\partial F}{\partial C} = 0$.

Mais, si cette condition est nécessaire, elle cesse d'être suffisante lorsque la valeur de C que l'on en tire fait évanouir $\frac{\partial F}{\partial y}$, et par suite aussi, *en général*, $\frac{\partial F}{\partial x}$ [852]. Dans ce cas, il faut, après avoir éliminé C entre les équations (1) et (4), vérifier directement que la valeur de y' tirée de l'équation ainsi obtenue est bien égale à celle que donne, pour chaque point de la courbe représentée par cette équation, l'équation (1) dans l'hypothèse de C constant; et cela d'autant plus, que la vraie valeur du rapport $\frac{\partial F}{\partial C} : \frac{\partial F}{\partial y}$ pour C variable pourrait être différente de la vraie valeur pour C constant.

Les relations

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

sont, comme nous l'avons vu (593 et suivants), celles qui caractérisent les points singuliers de la courbe (1) pour chaque valeur attribuée à C. En éliminant donc C entre l'une de ces équations, la seconde par exemple, et l'équation (1), on aura généralement le lieu d'un point singulier de la courbe (1), et ce lieu pourra être l'enveloppe d'une des branches de courbe qui passent par ce point. Mais il n'en sera pas toujours ainsi.

Exemples. — I. Soit l'équation intégrale générale

$$(1) \qquad (x - C)^3 + (x - C)^2 - (y + C)^2 = 0.$$

L'équation $\frac{\partial F}{\partial C} = 0$ est ici

$$3(x - C)^2 + 2(x + y) = 0,$$

d'où, en posant, pour abréger,

$$\frac{2}{3}(x + y) = -u^2,$$

on tire

$$x - C = u, \quad y + C = -u - \frac{3}{2}u^2, \quad u^3\left(2 + \frac{9}{4}u\right) = 0.$$

De là les deux solutions

$$u = 0 \quad \text{et} \quad u = -\frac{8}{9},$$

c'est-à-dire

$$x + y = 0, \quad x + y = -\frac{32}{27}.$$

A chacune de ces deux solutions correspond la valeur $y' = -1$. Si l'on différentie maintenant l'équation (1) dans l'hypothèse de C constant, il vient

$$3(x - C)^2 + 2(x - C) - 2(y + C)y' = 0,$$

et la valeur de y' devient, pour $x - C = u = 0$, de la forme $\frac{0}{0}$. En différentiant une fois de plus, il vient, dans la même hypothèse,

$$2 - 2y'^2 = 0,$$

c'est-à-dire

$$y' = \pm 1.$$

L'une de ces valeurs, $y' = -1$, est la même que celle qui résulte de la

solution $x + y = 0$. Donc cette solution représente l'enveloppe de celle des deux branches de courbe qui correspond à $y' = -1$, et cette enveloppe est en même temps le lieu du point double, intersection des deux branches. L'autre solution $x + y = -\frac{32}{27}$ donne l'enveloppe d'une branche de la courbe correspondante à un point simple.

II. Soit la courbe

$$(2)\qquad y^3 + (x - C)^2 + Cy(x - C) = 0.$$

En différentiant l'équation par rapport à C, on en tire

$$C = \frac{x(y-2)}{2(y-1)}, \quad x - C = \frac{xy}{2(y-1)},$$

d'où, en substituant dans (2),

$$y^2(y-1)(4y^2 - 4y + x^2) = 0.$$

La solution $y = 0$, qui répond à $C = x$, donne $y' = 0$. Or, en différentiant l'équation (2) dans l'hypothèse de C constant, la valeur de y' pour $y = 0$, $C = x$ se présente d'abord sous la forme $\frac{0}{0}$. Mais, en différentiant l'équation une seconde fois, la valeur de y' devient ∞ ou $-\frac{1}{C}$, et, par conséquent, $y' = 0$ ne convient pas aux courbes (2) pour $x = C$. Donc $y = 0$ ne représente pas une enveloppe de ces courbes.

855. *Solutions singulières déduites de l'équation différentielle.* — Soit

$$(1)\qquad f(x, y, y') = 0$$

l'équation différentielle donnée. Nous pouvons considérer cette équation comme représentant une surface dont y' serait l'ordonnée perpendiculaire au plan des xy. A chaque point (x, y, C) de la surface qui représente l'intégrale générale

$$(2)\qquad F(x, y, C) = 0$$

correspond un point de la surface (1) (x, y, y').

Si en un point $M(x, y)$ du plan des xy se coupent deux enveloppées correspondantes aux valeurs C et C_1 de la constante, ces

deux courbes auront deux tangentes différentes dont les coefficients angulaires seront les ordonnées de la surface (1) menées par le point M. A mesure que C_1 tend vers C, et M vers un point de l'enveloppe, les deux valeurs de y' tendent à devenir égales, de sorte que, pour un point de l'enveloppe, l'ordonnée devient tangente à la surface (1). Donc le cylindre parallèle aux C et aux y', qui est circonscrit à la surface (2), est tangent aussi à la surface (1), et, par conséquent, l'enveloppe est le contour apparent de la surface (1) ou du moins fait partie de ce contour; car rien ne prouve que, réciproquement, un cylindre tangent à la surface (1) soit nécessairement tangent à la surface (2).

Donc, pour trouver la solution singulière de l'équation différentielle donnée, on commencera par chercher le contour apparent de la surface représentée par cette équation, en raisonnant comme nous l'avons fait dans les numéros précédents pour trouver le contour apparent de la surface (2). Puis on devra s'assurer si la valeur de y' obtenue par la différentiation de l'équation de ce contour apparent satisfait bien à l'équation différentielle. Si cette condition n'est pas remplie, la solution devra être rejetée, comme étrangère à l'équation différentielle. Si, au contraire, elle est remplie, il restera encore à distinguer si la solution obtenue est une solution singulière ou si c'est une intégrale particulière, distinction dont nous nous occuperons plus loin.

856. Ainsi, si l'on suppose d'abord l'équation (1) mise sous forme rationnelle et entière, on obtiendra le contour apparent de la surface (1) en éliminant y' entre l'équation (1) et sa dérivée par rapport à y'

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = 0, \tag{3}$$

ce qui revient à chercher le lieu des points (x, y) pour lesquels l'équation (1) donne pour y' deux racines égales.

Si l'équation (1) est transformée de manière que l'équation (3) perde une partie ou la totalité de ses solutions, on retrouvera les solutions perdues en ayant recours à l'une des équations

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \infty, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \infty, \tag{4}$$

qui sont généralement la conséquence l'une de l'autre.

On pourrait le déduire de la remarque que, pour chaque point de la courbe de contact de la surface (1) avec le cylindre circonscrit, on doit avoir

$$(5) \qquad \frac{\partial y'}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial y'}} = \infty, \quad \frac{\partial y'}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}}{\dfrac{\partial f}{\partial y'}} = \infty.$$

Le cas où la valeur de y' annulerait à la fois $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ donnerait lieu à des remarques analogues à celles du numéro précédent.

Exemple. — Considérons l'équation différentielle

$$(6) \qquad (xy' - y)^2 - 2xy(1 + y'^2) = 0,$$

que l'on déduit de l'équation intégrale

$$(7) \qquad x^2 + y^2 - 2C(x + y) + C^2 = 0,$$

traitée au n° 388. En appliquant à l'équation (6) la règle donnée par la formule (3), il vient

$$x(xy' - y - 2yy') = 0,$$

ce qui donne d'abord la solution $x = 0$, d'où $y' = \infty$, ce qui satisfait bien à l'équation (6). En égalant l'autre facteur à zéro, il vient

$$y' = \frac{y}{x - 2y}, \quad \text{d'où} \quad y(y - x)^2 = 0.$$

On en tire d'abord la solution $y = 0$, qui satisfait à l'équation différentielle. Quant à l'autre solution, savoir $y - x = 0$, on voit aisément que la valeur qu'elle donne pour y' ne satisfait pas à l'équation (6). C'est donc une solution étrangère.

Si l'on avait mis l'équation (6) sous la forme

$$y' = -\frac{\sqrt{2} + \sqrt{\dfrac{y}{x}}}{\sqrt{2} + \sqrt{\dfrac{x}{y}}},$$

on aurait

$$\frac{dy'}{dx} = \frac{\sqrt{2xy} + x + x\left(\sqrt{\frac{2x}{y}} + 1\right)}{2x^2\left(\sqrt{2} + \sqrt{\frac{x}{y}}\right)^2},$$

valeur qui devient infinie pour $x = 0$; etc.

857. *Caractères distinctifs des solutions singulières et des intégrales particulières.* — La distinction entre les solutions singulières et les intégrales particulières est facile quand on connaît l'intégrale générale. Soit, en effet,

$$(1) \qquad F(x, y, C) = 0$$

l'intégrale générale, et soit donnée une relation sans constante arbitraire

$$(2) \qquad \varphi(x, y) = 0,$$

satisfaisant à l'équation différentielle, c'est-à-dire donnant, pour chaque point (x, y) de la courbe qu'elle représente, la même valeur de y' que l'équation différentielle. Si (2) représente une intégrale particulière, il faudra que cette équation puisse se déduire de (1) en particularisant convenablement la constante C. Il devra donc exister une valeur de C qui rende l'équation (1) identique avec (2). Il s'ensuit de là que, si entre les équations (1) et (2) on élimine une des variables x, y, l'autre devra aussi disparaître, et l'équation résultante devra ne contenir plus que la seule inconnue C. Si l'autre variable ne disparaît pas, l'équation (2) représentera alors une solution singulière.

Ainsi, dans l'exemple du numéro précédent, la solution $x = 0$, substituée dans l'intégrale générale (7), donne $(y - C)^2 = 0$, d'où l'on tire pour C une valeur variable. Donc $x = 0$ est une solution singulière.

858. Supposons maintenant que la solution proposée ait été déduite directement de l'équation différentielle. Si cette solution est une intégrale particulière, les valeurs de y'', y''', ... que l'on en déduira par des différentiations successives devront être égales,

pour chaque point (x, y) de la courbe (2), aux valeurs obtenues de la même manière au moyen de l'équation différentielle. Si donc on vient à rencontrer une dérivée d'un certain ordre qui ait des valeurs différentes, suivant qu'on la déduit de la solution (2) ou de l'équation différentielle elle-même, cela prouvera que la courbe (2) ne fait pas partie de la série des enveloppées. Donc la solution (2) sera une solution singulière.

Exemple. — Soit l'équation différentielle

$$y - xy' = \frac{x^2 + y^2}{2a}\sqrt{1 + y'^2}.$$

Si l'on pose, pour abréger, $\frac{x^2 + y^2}{2a} = u$, et qu'entre l'équation

$$(1)\qquad y - xy' = u\sqrt{1 + y'^2}$$

ou

$$(2)\qquad (u^2 - x^2)y'^2 + 2xyy' + u^2 - y^2 = 0$$

et sa dérivée par rapport à y' on élimine y', il vient

$$\frac{xy}{u^2 - x^2} = \frac{u^2 - y^2}{xy}, \quad \text{ou} \quad u^2(u^2 - x^2 - y^2) = 0,$$

ce qui donne les deux solutions $u = 0$ et $u^2 = x^2 + y^2$, c'est-à-dire

$$x^2 + y^2 = 0 \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 = 4a^2.$$

L'une et l'autre de ces deux solutions donnent

$$y' = -\frac{x}{y},$$

d'où

$$y - xy' = \frac{x^2 + y^2}{y}, \quad \sqrt{1 + y'^2} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{y},$$

valeurs qui, substituées dans l'équation (1), y satisfont soit pour $u = 0$, soit pour $u = 2a$.

La première de ces solutions donne, pour le rayon de courbure, $\rho = 0$, la seconde $\rho = 2a$. Cherchons maintenant la valeur de ρ qui résulte de l'intégrale générale.

L'équation (2) donne

$$(3) \qquad y' = \frac{-xy + uR}{u^2 - x^2} \quad [1],$$

en posant

$$R = \sqrt{u^2 - x^2 - y^2}.$$

Si l'on différentie l'équation (2), on a

$$[(u^2 - x^2)y' + xy]y'' + uu'(1 + y'^2) = 0.$$

En remplaçant le multiplicateur de y'' par sa valeur uR, tirée de (3), et remarquant que

$$u' = \frac{x + yy'}{a} = \frac{1}{a}\,\frac{x(u^2 - x^2 - y^2) + uyR}{u^2 - x^2} = \frac{R}{a}\,\frac{uy - xR}{u^2 - x^2},$$

$$u\sqrt{1 + y'^2} = y - xy' = \frac{u(uy - xR)}{u^2 - x^2},$$

d'où

$$u' = \frac{R}{a}\sqrt{1 + y'^2},$$

et enfin que

$$(u^2 - x^2)y' + xy = uR, \quad uRy'' + u\frac{R}{a}(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}} = 0,$$

il vient

$$uR\left[\frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{a}\right] = 0,$$

ce qui donne, au signe près, en faisant abstraction de la solution $uR = 0$, que nous venons d'examiner,

$$\rho = a.$$

Cette valeur n'étant pas la même que celles que donnaient les solutions $u = 0$ et $R = 0$ ou $x^2 + y^2 = 4a^2$, on en conclut que ces deux dernières étaient des solutions singulières, et non des intégrales particulières.

C'est ce qu'on peut voir clairement en cherchant l'intégrale gé-

---

[1] Les deux valeurs de y' devenant égales pour $R = 0$, on voit que $R = 0$ peut donner une solution singulière [856].

nérale. Pour cela, posons $x = r\cos p$, $y = \sin p$; il viendra

$$-r^2\,dp = \frac{r^2}{2a}\sqrt{dr^2 + r^2 dp^2},$$

ou, en faisant abstraction de la solution $r^2 = 0$,

$$0 = (4a^2 - r^2)\,dp^2 - dr^2.$$

Cette équation est vérifiée par $4a^2 - r^2 = 0$, $dr^2 = 0$; en laissant encore de côté cette solution, il vient

$$dp = \frac{dr}{\sqrt{4a^2 - r^2}}, \quad \text{d'où} \quad r = 2a\sin(p + C),$$

ou, en remplaçant $\sin C$ par C,

$$(x - aC)^2 + (y - a\sqrt{1 - C^2})^2 = a^2,$$

équation d'un cercle de rayon a, passant par l'origine et ayant pour enveloppe le système des deux cercles $r = 0$ et $r = 2a$.

859. Mais ce caractère n'est pas toujours décisif, les enveloppées pouvant avoir dans certains cas avec l'enveloppe un contact d'ordre infini.

Soit, par exemple, l'équation différentielle

$$(1) \qquad y' = y(\log y)^2.$$

L'équation $\dfrac{\partial y'}{\partial y} = \infty$ donne la solution $y = 0$, qui satisfait à l'équation différentielle [385], et qui donne pour toutes les dérivées y'', y''', ... des valeurs nulles. On tire de l'équation différentielle

$$y'' = y\,[(\log y)^4 + 2(\log y)^3],$$

et cette dérivée s'annule avec y. On verrait de même que toutes les dérivées suivantes s'annulent également, en vertu de l'équation différentielle aussi bien qu'en vertu de la solution $y = 0$.

Mais, si l'on cherche l'intégrale générale de l'équation (1), laquelle est

$$y = e^{\frac{1}{C - x}},$$

on voit que cette intégrale ne peut se réduire à $y = 0$ pour aucune

valeur constante de C. Donc, malgré l'identité des dérivées pour $y=0$, cette solution est une solution singulière de l'équation différentielle.

Il est donc indispensable d'avoir un autre critérium pour distinguer les solutions singulières à l'aide de l'équation différentielle elle-même. Nous allons exposer la méthode découverte par P.-H. Blanchet, ancien maître de conférences à l'École Normale, et qui nous a été communiquée par l'auteur en 1846.

860. Supposons l'équation différentielle résolue par rapport à y', et mise sous la forme

$$(1) \qquad y' = f(x, y),$$

et soit

$$(2) \qquad y = V = F(x, C)$$

son intégrale générale. Soit donnée une solution

$$(3) \qquad y = X = \varphi(x),$$

sans constante arbitraire, et satisfaisant à l'équation différentielle (1). Il s'agit de savoir si $y = X$ est une intégrale particulière ou une solution singulière de l'équation (1).

Puisque V et X sont des solutions de l'équation (1), on doit avoir identiquement, quelle que soit la valeur de C [829],

$$V' = f(x, V), \quad X' = f(x, X),$$

d'où l'on tire

$$(4) \qquad \frac{V' - X'}{V - X} = \frac{f(x, V) - f(x, X)}{V - X}.$$

Multiplions les deux membres par dx, et intégrons entre deux limites x_0 et x, entre lesquelles on suppose que la valeur (2) de y' ne passe pas par l'infini pour la valeur attribuée à la constante C, et que la fonction sous le signe f, ainsi que les autres analogues que nous rencontrerons, ne change pas de signe. Il vient alors

$$(5) \qquad \log \frac{V - X}{V_0 - X_0} = \int_{x_0}^{x} \frac{f(x, V) - f(x, X)}{V - X}\, dx,$$

V_0, X_0 étant les valeurs des fonctions V, X pour $x = x_0$.

Attribuons maintenant à la constante C une valeur C_0 telle que l'on ait

$$V_0 = F(x_0, C_0) = \varphi(x_0) = X_0.$$

La fonction sous le signe $\int$ prendra, pour la limite inférieure x_0 de l'intégrale, la valeur limite

$$\lim \frac{f(x_0, V) - f(x_0, X)}{V - X} = f'_y(x_0, X_0).$$

Si la dérivée partielle $f'_y(x, X)$ a une valeur finie, quel que soit x entre les limites x_0 et x, alors l'intégrale du second membre de (5), ayant tous ses éléments finis, aura une valeur finie. Donc le premier membre $\log \frac{V - X}{V_0 - X_0}$ ne pourra être infini. Mais le dénominateur s'annule pour $C = C_0$; il faut donc que l'on ait aussi, pour $C = C_0$, $V = X$. Donc la solution $y = X$ se déduit de l'intégrale générale $y = V$, en attribuant à la constante C une valeur convenable; donc $y = X$ est une intégrale particulière. Ainsi toute solution qui donne pour $\frac{\partial y'}{\partial y}$ une valeur finie est une intégrale particulière.

Si $f'_y(x, V)$ est infiniment grand d'un ordre $\mu \geqq m$ pour V infiniment voisin de X, en le multipliant par $(V - X)^m$, le produit restera infini, ou du moins ne s'annulera pas. Donc la quantité

$$(6) \qquad \frac{1}{m}[(V - X)^m - (V_0 - X_0)^m] = \int_{x_0}^{x} \frac{f(x, V) - f(x, X)}{(V - X)^{1-m}} dx$$

sera finie ou infinie, mais non $= 0$, puisque les éléments de l'intégrale sont finis ou infinis, et tous de même signe. On ne peut donc avoir $V = X$ en même temps que $V_0 = X_0$. Donc si, pour $y = X$, $\frac{\partial y'}{\partial y}$ est infini d'un ordre $\mu \geqq m > 0$, X sera une solution singulière.

Si l'ordre infinitésimal de $\frac{\partial y'}{\partial y}$ est zéro, comme celui de log 0 [187], alors la quantité

$$(7) \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{d(V - X)}{(V - X)\log(V - X)} = \log\frac{\log(V - X)}{\log(V_0 - X_0)} \\ \displaystyle\quad = \int_{x_0}^{x} \frac{f(x, V) - f(x, X)}{(V - X)\log(V - X)} dx \end{cases}$$

ne sera pas infinie si la valeur de

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{f(x, X+\varepsilon) - f(x, X)}{\varepsilon \log \varepsilon}$$

n'est pas infinie. Alors $Y - X$ s'annulera pour $C = C_0$, et $y = X$ sera une intégrale particulière.

Si cette limite est infinie de l'ordre de $(\log o)^\mu$, en prenant $m \leqq \mu$, l'expression

$$(8) \quad \begin{cases} -\dfrac{1}{m}\left\{\dfrac{1}{[\log(Y-X)]^m} - \dfrac{1}{[\log(Y_0 - X_0)]^m}\right\} \\ = \displaystyle\int_{x_0}^{x} \dfrac{f(x, Y) - f(x, X)}{(Y-X)[\log(Y-X)]^{1+m}}\,dx \end{cases}$$

ne sera pas nulle; donc $Y - X$ n'est pas nul, et $y = X$ est une solution singulière.

En continuant ainsi, on verra que $y = X$ est une solution particulière si, pour ε infiniment petit, elle rend finie la limite de l'une des expressions

$$\frac{f(x, y+\varepsilon) - f(x, y)}{\varepsilon},$$

$$\frac{f(x, y+\varepsilon) - f(x, y)}{\varepsilon \log \varepsilon},$$

$$\frac{f(x, y+\varepsilon) - f(x, y)}{\varepsilon \log \varepsilon \log\log \varepsilon}, \quad \ldots.$$

Ce sera, au contraire, une solution singulière si, pour une valeur positive et finie, mais aussi petite que l'on voudra, de m, elle rend infinie la limite de l'un des rapports

$$\frac{f(x, y+\varepsilon) - f(x, y)}{\varepsilon^{1-m}},$$

$$\frac{f(x, y+\varepsilon) - f(x, y)}{\varepsilon (\log \varepsilon)^{1+m}},$$

$$\frac{f(x, y+\varepsilon) - f(x, y)}{\varepsilon \log \varepsilon (\log\log \varepsilon)^{1+m}}, \quad \ldots.$$

861. *Exemples.* — I. L'équation différentielle

$$xy' - y = 0$$

admet pour solution $y = 0$. On a ici $f(x, y) = \frac{y}{x}$, et le rapport

$$\frac{\frac{y+\varepsilon}{x} - \frac{y}{x}}{\varepsilon} = \frac{1}{x}$$

reste fini pour $y = 0$. Donc $y = 0$ est une intégrale particulière.

En mettant l'équation différentielle sous la forme

$$x - yx' = 0,$$

où $x' = \frac{dx}{dy}$, on verrait de même, par l'échange mutuel de y et de x, que la solution $x = 0$ est une autre intégrale particulière.

II. L'équation différentielle

$$y'\sqrt{x} - \sqrt{y} = 0$$

est aussi vérifiée par $y = 0$. Or, en faisant $Y = 0$, on a

$$\frac{\frac{\sqrt{0+\varepsilon}}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{0}}{\sqrt{x}}}{\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{x\varepsilon}},$$

quantité infinie pour $\varepsilon = 0$. De plus,

$$\frac{\frac{\sqrt{0+\varepsilon}}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{0}}{\sqrt{x}}}{\varepsilon^{1-m}} = \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{2}-m}\sqrt{x}}$$

est encore infinie pour toute valeur de $m < \frac{1}{2}$. Donc $y = 0$ est une solution singulière.

En mettant l'équation différentielle sous la forme

$$\sqrt{x} - x'\sqrt{y} = 0,$$

on verrait de même que $x = 0$ est aussi une solution singulière.

III. Si l'on considère la solution $y = 0$ de l'équation [859]

$$y' = y(\log y)^2,$$

on a

$$\lim \frac{\varepsilon(\log\varepsilon)^2 - 0(\log 0)^2}{\varepsilon} = \lim(\log\varepsilon)^2 = \infty,$$

tandis que la limite de la même expression multipliée par ε^m serait zéro. On a ensuite

$$\lim \frac{f(x, X+\varepsilon) - f(x, X)}{\varepsilon \log\varepsilon} = \lim \frac{\varepsilon(\log\varepsilon)^2}{\varepsilon\log\varepsilon} = \infty,$$

et, de plus,

$$\lim \frac{f(x, X+\varepsilon) - f(x, X)}{\varepsilon(\log\varepsilon)^{1+m}} = \lim \frac{\varepsilon(\log\varepsilon)^2}{\varepsilon(\log\varepsilon)^{1+m}} = \lim \frac{1}{(\log\varepsilon)^{m-1}}$$

est infinie pour $m > 0$ et < 1. Donc $y = 0$ est une solution singulière.

IV. Au contraire, la solution $y = 0$ de l'équation

$$y' = \frac{y \log y}{x}$$

donne

$$\lim \frac{f(x, X+\varepsilon) - f(x, X)}{\varepsilon \log\varepsilon} = \text{une quantité finie.}$$

Donc $y = 0$ est une intégrale particulière. On peut, en effet, déduire cette solution de l'intégrale générale

$$y = e^{Cx},$$

en donnant à C la valeur $-\infty$ ou $+\infty$, suivant que l'on considère les valeurs positives ou négatives de x.

CHAPITRE III.

DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES D'ORDRE SUPÉRIEUR AU PREMIER.

§ I.

INTÉGRATION DE QUELQUES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES D'ORDRE SUPÉRIEUR AU PREMIER.

862. Nous traiterons d'abord quelques cas où l'intégration d'une équation différentielle d'ordre supérieur au premier peut s'effectuer complétement à l'aide des quadratures.

I. Considérons d'abord le cas où l'équation ne contient que la variable indépendante x, avec une seule dérivée d'ordre supérieur $y^{(n)}$ de la fonction inconnue y, et supposons, en premier lieu, que cette équation soit résolue par rapport à $y^{(n)}$, et de la forme

$$(1) \qquad y^{(n)} = f(x).$$

Si l'on désigne, pour abréger, par $\int^n f(x)dx^n$ le résultat de n intégrations successives opérées sur la fonction $f(x)$, multipliée chaque fois par dx, on voit, en mettant les constantes arbitraires en évidence, que l'intégrale générale de l'équation (1) peut s'écrire sous la forme

$$(2) \qquad y = \int^n f(x)\,dx^n + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \ldots + C_n.$$

Au lieu d'une *intégrale d'ordre n*, on peut introduire dans l'expression (2) des intégrales du premier ordre. En effet, l'intégra-

tion par parties donne successivement

$$\iint f(x)\,dx^2 = x\int f(x)\,dx - \int x f(x)\,dx$$
$$= x\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx - \int_{x_0}^{x} x f(x)\,dx + Cx + C'$$
$$= x\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt - \int_{x_0}^{x} t f(t)\,dt + Cx + C'$$
$$= \int_{x_0}^{x} (x-t) f(t)\,dt + Cx + C',$$

$$\iiint f(x)\,dx^3 = \int\left[x\int f(x)\,dx - \int x f(x)\,dx\right]dx$$
$$= \frac{1}{2}\left[x^2\int f(x)\,dx - \int x^2 f(x)\,dx\right] - \left[x\int x f(x)\,dx - \int x^2 f(x)\,dx\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[x^2\int f(x)\,dx - 2x\int x f(x)\,dx + \int x^2 f(x)\,dx\right]$$
$$= \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^2}{1.2} f(t)\,dt + Cx^2 + C'x + C''.$$

En continuant ainsi, on voit que les résultats trouvés sont de la forme

$$(3)\qquad \int^n f(x)\,dx^n = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f(t)\,dt + C_1 x^{n-1} + \ldots + C_n.$$

On démontrera la généralité de cette formule en différentiant les deux membres de l'équation (3) par rapport à x, ce qui reproduira la formule analogue relative à l'indice $n-1$. Si celle-ci est supposée vérifiée, on en conclura réciproquement, par l'intégration, que l'équation (3) en est la conséquence, d'où il s'ensuit que la formule (3) est vraie pour toute valeur de l'indice n.

La formule (3) donne l'intégrale générale de l'équation (1) sous la forme d'une intégrale définie prise par rapport à un paramètre variable. Nous saisissons cette occasion pour faire remarquer cette forme d'intégrale, sur laquelle est fondée une méthode très-générale d'intégration des équations différentielles.

Si l'on développe, dans le second membre de (3), l'expression $(x-t)^{n-1}$, ce second membre se présente alors sous la forme d'une somme d'intégrales du premier ordre.

863. Indiquons quelques applications de la formule (3).

1° Soit $f(x) = e^x$, et posons $\int e^x x^n dx = u_n$. On trouvera successivement, d'après la formule (3),

$$\iint e^x dx^2 = e^x + Cx + C' = x\int e^x dx - \int x e^x dx = x u_0 - u_1,$$

$$\iiint e^x dx^3 = e^x + \frac{1}{2}Cx^2 + C'x + C'' = \frac{1}{2}(x^2 u_0 - 2x u_1 + u_2),$$

$$\int^4 e^x dx^4 = e^x + \frac{1}{6}Cx^3 + \ldots + C''' = \frac{1}{2.3}(x^3 u_0 - 3x^2 u_1 + 3x u_2 - u_3),$$

et ainsi de suite; d'où l'on tirera l'une après l'autre les valeurs de $u_1, u_2, u_3, \ldots$. On a ainsi

$$u_0 = e^x + C, \quad u_1 = (x-1)e^x + C', \quad u_2 = (x^2 - 2x + 2)e^x + C'', \quad \ldots.$$

2° En remplaçant, dans (3), $f(x)$ par $f^{(n)}(x)$, il vient [326 et 360]

$$\int_{x_0}^x \int_{x_0}^x \cdots \int_{x_0}^x f^{(n)}(x)\,dx^n$$
$$= f(x) - f(x_0) - \frac{x - x_0}{1} f'(x_0) - \ldots - \frac{(x-x_0)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{(n-1)}(x_0)$$
$$= \frac{1}{1.2\ldots(n-1)} \int_{x_0}^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)\,dt,$$

ce qui nous donne immédiatement l'expression, déjà obtenue, du reste de la série de Taylor sous forme d'intégrale définie.

864. Si, au lieu d'être résolue par rapport à $y^{(n)}$, l'équation proposée était résolue par rapport à x, et de la forme

$$(4) \qquad x = \varphi(y^{(n)}),$$

on en tirerait d'abord, en différentiant,

$$dx = \varphi'(y^{(n)})\,dy^{(n)}.$$

On a ensuite

$$dy^{(n-1)} = y^{(n)} dx = \varphi'(y^{(n)})\,y^{(n)}\,dy^{(n)},$$

d'où, en intégrant,

$$y^{(n-1)} = \varphi_1(y^{(n)}) + C_1.$$

De même,

$$dy^{(n-2)} = y^{(n-1)} dx = \varphi_1(y^{(n)})\,\varphi'(y^{(n)})\,dy^{(n)} + C_1 dx,$$

et, en intégrant,

$$y^{(n-2)} = \varphi_2(y^{(n)}) + C_1 x + C_2.$$

En continuant ainsi, on obtiendra la valeur de y, exprimée au moyen de $y^{(n)}$ et de n constantes arbitraires. En éliminant $y^{(n)}$ de cette valeur au moyen de l'équation (4), on aura une relation entre x, y et n constantes arbitraires, qui sera l'intégrale générale de l'équation proposée.

865. II. Un second cas d'intégrabilité par les quadratures est celui où l'équation différentielle ne contient que deux dérivées d'ordres consécutifs, et où elle est, par conséquent, de la forme

$$F(y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0.$$

Si l'on suppose d'abord l'équation résolue par rapport à la dérivée de l'ordre le plus élevé, et mise sous la forme

$$(1) \qquad y^{(n)} = f(y^{(n-1)}),$$

on en tire, à cause de $dy^{(n-1)} = y^{(n)} dx$,

$$(2) \qquad dx = \frac{dy^{(n-1)}}{y^{(n)}} = \frac{dy^{(n-1)}}{f(y^{(n-1)})},$$

d'où

$$(3) \qquad x = \int \frac{dy^{(n-1)}}{f(y^{(n-1)})} + C_1.$$

On est ainsi ramené à une équation de même forme que celle qui a été traitée dans le numéro précédent, et l'on en tire successivement

$$y^{(n-2)} = \int y^{(n-1)} dx = \int \frac{y^{(n-1)} dy^{(n-1)}}{f(y^{(n-1)})} + C_2 = f_1(y^{(n-1)}) + C_2,$$

$$y^{(n-3)} = \int y^{(n-2)} dx = \int \frac{f_1(y^{(n-1)}) dy^{(n-1)}}{f(y^{(n-1)})} + C_2 x + C_3,$$

et ainsi de suite, de sorte que l'on obtiendra finalement y en fonction de $y^{(n-1)}$, de x et de $n-1$ constantes arbitraires. L'élimination de $y^{(n-1)}$ entre l'équation obtenue et l'équation (3) donnera une relation entre x, y et n constantes arbitraires, qui sera l'intégrale générale de l'équation (1).

Exemple. — Trouver la courbe dont le rayon de courbure a une valeur constante donnée a.

L'équation différentielle du problème sera

$$\rho = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = a,$$

d'où

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{1}{a}(1+y'^2)^{\frac{3}{2}},$$

$$x - C = \int \frac{a\,dy'}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{ay'}{\sqrt{1+y'^2}},$$

$$y - C' = \int \frac{ay'\,dy'}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{a}{\sqrt{1+y'^2}},$$

ce qui donne, en éliminant y',

$$(x-C)^2 + (y-C')^2 = a^2.$$

866. Supposons maintenant l'équation (1) résolue par rapport à la dérivée la moins élevée, et mise sous la forme

$$y^{(n-1)} = \varphi(y^{(n)}). \tag{4}$$

On en tire

$$dy^{(n-1)} = y^{(n)}dx = \varphi'(y^{(n)})\,dy^{(n)},$$

d'où

$$dx = \frac{\varphi'(y^{(n)})\,dy^{(n)}}{y^{(n)}},$$

et par suite

$$x = \int \frac{\varphi'(y^{(n)})\,dy^{(n)}}{y^{(n)}} + C_1. \tag{5}$$

On a ensuite

$$dy^{(n-2)} = y^{(n-1)}dx = \varphi(y^{(n)})\,\frac{\varphi'(y^{(n)})\,dy^{(n)}}{y^{(n)}},$$

d'où

$$y^{(n-2)} = \int \varphi(y^{(n)})\,\frac{\varphi'(y^{(n)})\,dy^{(n)}}{y^{(n)}} + C_2 = \varphi_1(y^{(n)}) + C_2,$$

puis, de même,

$$y^{(n-3)} = \int y^{(n-2)}\,dx = \int \varphi_1(y^{(n)})\,\frac{\varphi'(y^{(n)})\,dy^{(n)}}{y^{(n)}} + C_2 x + C_3,$$

et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'on parvienne à une valeur de y exprimée au moyen de $y^{(n)}$, de x et de $n-1$ constantes arbitraires. En éliminant $y^{(n)}$ à l'aide de l'équation (5), on aura l'équation intégrale générale de (4), entre x, y et n constantes arbitraires.

867. III. Le troisième cas que nous étudierons est celui des équations qui ne renferment que deux dérivées dont les ordres diffèrent de deux unités, et qui sont, par suite, de la forme

$$F(y^{(n-2)}, y^{(n)}) = 0.$$

Commençons par supposer l'équation résolue par rapport à la dérivée de l'ordre le plus élevé, et mise sous la forme

$$(1) \qquad y^{(n)} = f(y^{(n-2)}).$$

De l'égalité

$$(2) \qquad dx = \frac{dy^{(n-1)}}{y^{(n)}} = \frac{dy^{(n-2)}}{y^{(n-1)}}$$

on tire

$$(3) \qquad y^{(n-1)}\, dy^{(n-1)} = y^{(n)}\, dy^{(n-2)},$$

ou, en mettant pour $y^{(n)}$ sa valeur tirée de l'équation (1),

$$y^{(n-1)}\, dy^{(n-1)} = f(y^{(n-2)})\, dy^{(n-2)},$$

d'où l'on tire, en intégrant, puis extrayant la racine carrée,

$$y^{(n-1)} = \sqrt{2\int f(y^{(n-2)})\, dy^{(n-2)} + C},$$

équation de la forme $y^{(n-1)} = f_1(y^{(n-2)})$, et dont on achèvera l'intégration comme au n° 865.

Exemple. — Soit l'équation

$$y'' + a^2 y = 0.$$

On en tire

$$y'\, dy' = -a^2 y\, dy, \quad \text{d'où} \quad y' = \sqrt{C^2 - a^2 y^2},$$

ensuite

$$x + C' = \int \frac{dy}{\sqrt{C^2 - a^2 y^2}} = \frac{1}{a} \arcsin \frac{ay}{C},$$

d'où, en écrivant C au lieu de $\frac{C}{a}$,

$$y = C \sin a(x + C').$$

868. Si l'équation est résolue par rapport à la dérivée de l'ordre le moins élevé, et de la forme

$$y^{(n-2)} = \varphi(y^{(n)}),$$

on aura, en différentiant, et remarquant que l'on a, d'après (2),

$$dy^{(n-2)} = y^{(n-1)}\,dx = y^{(n-1)}\,\frac{dy^{(n-1)}}{y^{(n)}},$$

$$y^{(n-1)}\,dy^{(n-1)} = y^{(n)}\varphi'(y^{(n)})\,dy^{(n)},$$

d'où

$$y^{(n-1)} = \sqrt{2\int y^{(n)}\varphi'(y^{(n)})\,dy^{(n)} + C},$$

et, à partir de là, on retombe dans le cas du n° 866.

§ II.

CAS D'ABAISSEMENT DE L'ORDRE D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE.

869. I. *Équations dont le premier membre est une différentielle exacte.* — Considérons d'abord un exemple particulier, et soit l'équation

$$y + 3xy' + 2yy'^2 + (x^2 + 2y^2y')y'' = 0$$

ou

$$(y + 3xy' + 2yy'^3)\,dx + (x^2 + 2y^2y')\,dy' = 0.$$

Cherchons si le premier membre ne serait pas la différentielle d'une certaine fonction $u = f(x, y, y')$. La différentielle d'une telle fonction est de la forme

$$du = \frac{\partial f}{\partial y'}\,dy' + \ldots,$$

les termes non écrits étant de la forme $dx\,\varphi(x, y, y')$. Donc le coefficient de dy' dans l'équation proposée est la dérivée partielle de u par rapport à y'. Soit u_1 l'intégrale de ce coefficient, prise en considérant y' comme seule variable. Dans l'exemple actuel, cette intégrale est

$$u_1 = \int (x^2 + 2y^2y')\,\partial y' = x^2y' + y^2y'^2,$$

en n'y introduisant aucun terme indépendant de y'. On aura

$$du_1 = (x^2 + 2y^2y')\,dy' + y'\,d(x^2) + y'^2\,d(y^2).$$

Il est clair que $du - du_1$ ne contiendra plus aucun terme en dy', c'est-à-dire aucun terme dépendant de la différentielle seconde de y ; et comme $du - du_1$ est une différentielle exacte si du en est une, il faudra que cette expression soit la différentielle d'une fonction de x et de y, ne renfermant, par conséquent, y' ou dx et dy qu'au premier degré. On trouve, en effet,

$$du - du_1 = (y + 3xy' + 2yy'^3)\,dx - 2xy'\,dx - 2yy'^3\,dx$$
$$= y\,dx + x\,dy = d(xy),$$

ce qui est une différentielle exacte. On a donc

$$u = u_1 + xy = x^2 y' + y^2 y'^2 + xy = \text{const.},$$

et cette équation est une intégrale première de l'équation proposée.

En raisonnant de même sur le cas général, on arrive à la règle suivante pour reconnaître si une expression différentielle donnée est la différentielle exacte d'une certaine fonction u et pour obtenir en même temps cette fonction. Soit n l'ordre de cette expression différentielle. Il faudra d'abord que la plus haute dérivée $y^{(n)}$ ou la plus haute différentielle $y^{(n)}\,dx = dy^{(n-1)}$ n'y entre qu'au premier degré. On intégrera alors le coefficient de $y^{(n)}$ partiellement par rapport à $y^{(n-1)}$, c'est-à-dire comme si $y^{(n-1)}$ était seule variable. Soit u_1 l'intégrale obtenue ; $du - du_1$ ne contiendra plus de termes en $y^{(n)}$ et se réduira à une expression différentielle où la plus haute différentielle sera $y^{(n-1)}\,dx = dy^{(n-2)}$. Cette expression devant être une différentielle exacte si du en est une, il faudra que $y^{(n-1)}$ ou $dy^{(n-2)}$ n'y entre qu'au premier degré. On intégrera alors le coefficient de $y^{(n-1)}$ partiellement par rapport à $y^{(n-2)}$, ce qui donnera l'intégrale u_2. Alors $du - du_1 - du_2$ ne contiendra plus que des termes d'ordre $n - 2$ au plus, et devra être une différentielle exacte. En continuant ainsi, si la quantité proposée est une différentielle exacte, on devra parvenir, en dernier lieu, à une expression en x, y, dx, dy, qui soit une différentielle exacte, et que l'on intégrera comme on l'a vu, n° 772 et suivants. La somme de toutes les intégrales partielles ainsi obtenues, $u_1 + u_2 + \ldots$, sera l'intégrale de l'expression proposée.

En égalant cette dernière intégrale à une constante arbitraire, on aura une intégrale première de l'équation $du = 0$, dont l'ordre se trouvera ainsi abaissé d'une unité.

Si, dans le cours du calcul, on rencontrait un reste dans lequel la plus haute dérivée entrât à un degré supérieur au premier, la méthode cesserait d'être applicable et l'expression proposée ne serait pas une différentielle exacte.

870. II. *Équations où l'une des variables x, y n'entre pas explicitement.* — Si l'équation ne contient pas y explicitement et est de la forme

$$f(x, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

en prenant y' pour nouvelle fonction inconnue, l'équation deviendra

$$f\left(x, y', \frac{dy'}{dx}, \ldots, \frac{d^{n-1}y'}{dx^{n-1}}\right) = 0,$$

et ne sera plus que de l'ordre $n-1$. L'intégration de cette équation conduira à une relation entre x, y' et $n-1$ constantes arbitraires, et cette relation elle-même s'intégrera par les quadratures, en la résolvant soit par rapport à y', soit par rapport à x [845].

Plus généralement, si l'équation proposée ne contient ni y ni aucune de ses $p-1$ premières dérivées, et qu'elle soit de la forme

$$f(x, y^{(p)}, y^{(p+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

on la ramènera, en prenant $y^{(p)}$ pour la fonction inconnue, à une équation de l'ordre $n-p$,

$$f\left(x, y^{(p)}, \frac{dy^{(p)}}{dx}, \ldots, \frac{d^{n-p}y^{(p)}}{dx^{n-p}}\right) = 0,$$

dont l'intégration conduira à une relation entre x, $y^{(p)}$ et $n-p$ constantes arbitraires. On intégrera cette relation à l'aide des quadratures, d'après ce que nous avons vu aux n[os] 862 et 864, ce qui complétera le nombre nécessaire n de constantes arbitraires.

Exemple. — Trouver la courbe dont le rayon de courbure soit égal à une fonction donnée X de l'abscisse x.

On a l'équation

$$\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = X,$$

qui peut s'écrire sous la forme

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy'}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}};$$

on en tire

$$\int \frac{dx}{X} + C = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}},$$

ou, en désignant, pour abréger, par V le premier membre de cette équation,

$$y' = \frac{V}{\sqrt{1-V^2}}, \quad \text{d'où} \quad y = \int \frac{V\,dx}{\sqrt{1-V^2}} + C'.$$

Si l'on demande, par exemple, que le rayon de courbure soit en raison inverse de l'abscisse, en prenant $X = \frac{a^2}{2x}$, il viendra

$$x^2 + C = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}, \quad \text{d'où} \quad y = \int \frac{(x^2+C)\,dx}{\sqrt{a^4 - (x^2+C)^2}} + C'.$$

La courbe représentée par cette équation est connue sous le nom de *courbe élastique*. C'est la forme qu'affecte une lame élastique dont une des extrémités est fixée, l'autre supportant un poids.

871. Si c'est la variable indépendante x qui n'entre pas dans l'équation différentielle, celle-ci étant de la forme

$$f(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

on ramènera ce cas au précédent en prenant x pour nouvelle variable dépendante, et exprimant les dérivées $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ de y par rapport à x au moyen des dérivées $x' = \frac{dx}{dy}$, $x'' = \frac{d^2x}{dy^2}, \ldots,$ $x^{(n)} = \frac{d^nx}{dy^n}$ de x par rapport à y.

Ainsi on aura $y' = \frac{1}{x'}$, $y'' = -\frac{x''}{x'^3}, \ldots$. D'après cela, l'équation [867]

$$y'' = f(y)$$

deviendra

$$-\frac{x''}{x'^3} = f(y) \quad \text{ou} \quad -\frac{dx'}{x'^3} = f(y)\,dy.$$

Si l'équation ne contenait que les dérivées de y à partir de la $p^{\text{ième}}$, et qu'elle fût de la forme

$$f(y^{(p)},\ y^{(p+1)},\ \ldots,\ y^{(n)}) = 0,$$

on l'abaisserait d'abord à l'ordre $n-p$ en prenant $y^{(p)}$ comme fonction inconnue; puis on l'abaisserait encore d'une unité en prenant $y^{(p)}$ comme variable indépendante et $x' = \dfrac{dx}{dy^{(p)}}$ pour nouvelle fonction inconnue. Ayant obtenu, par l'intégration, une relation entre $y^{(p)}$, x' et $n-p-1$ constantes arbitraires, on la ramènera, par des quadratures, d'abord à une relation entre $y^{(p)}$, x et $n-p$ constantes arbitraires, puis à une relation entre y, x et n constantes, qui sera l'intégrale complète.

872. On peut encore, dans le même cas, opérer l'abaissement de l'équation par un autre changement de la variable dépendante. On a, en effet, d'après la formule (2) du n° 867,

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{dy^{(n-1)}}{y^{(n)}},$$

d'où l'on tire

$$y^{(n)} = y' \frac{dy^{(n-1)}}{dy}.$$

En faisant maintenant successivement $n = 2, 3, \ldots$, et substituant les valeurs de $y'', y''', \ldots$ ainsi obtenues, la variable y étant prise pour nouvelle variable indépendante, on trouvera

$$y'' = y' \frac{dy'}{dy}, \quad y''' = y'^2 \frac{d^2 y'}{dy^2} + y' \left(\frac{dy'}{dy}\right)^2, \ \ldots;$$

de sorte que $y'', y''', \ldots, y^{(n)}$ seront exprimées au moyen de y' et de ses dérivées par rapport à y, jusqu'à l'ordre $n-1$. L'équation prendra donc la forme

$$F\left(y, y', \frac{dy'}{dy}, \ \ldots, \ \frac{d^{n-1} y'}{dy^{n-1}}\right) = 0.$$

En l'intégrant, on obtiendra une relation entre y, y' et $n-1$ constantes arbitraires, et l'on achèvera alors l'intégration en résolvant cette relation soit par rapport à y', soit par rapport à y [845].

Ainsi une équation du second ordre

$$f(y, y', y'') = 0$$

se ramènera, par cette transformation, à la forme

$$f\left(y, y', y' \frac{dy'}{dy}\right) = 0.$$

Par exemple, l'équation $y'' = f(y)$ devient [867]

$$y'\,dy' = f(y)\,dy.$$

De même, au moyen de la formule

$$y^{(n)} = y^{(p+1)} \frac{dy^{(n-1)}}{dy^{(p)}},$$

on ramènera l'équation $f(y^{(p)}, y^{(p+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0$ à la forme

$$\mathrm{F}\left(y^{(p)}, y^{(p+1)}, \frac{dy^{(p+1)}}{dy^{(p)}}, \ldots, \frac{d^{n-p-1}y^{(p+1)}}{dy^{(p)\,n-p-1}}\right) = 0;$$

l'intégration donnera une équation entre $y^{(p)}$, $y^{(p+1)}$ et $n-p-1$ constantes arbitraires, et l'on traitera ensuite cette équation par la méthode des n°s 865 et 866.

873. III. *Équations homogènes par rapport à y et à ses dérivées*, ou, ce qui revient au même, *par rapport à y et à ses différentielles dy, d^2y, ..., d^ny*.

Une telle équation peut s'écrire sous la forme

$$y^m f\left(x, \frac{y'}{y}, \frac{y''}{y}, \ldots, \frac{y^{(n)}}{y}\right) = 0.$$

Si l'on pose $\dfrac{y'}{y} = z'$, ou $y = e^z$, on aura les égalités

$$\begin{aligned}
y' &= e^z . z', \\
y'' &= e^z(z'' + z'^2), \\
y''' &= e^z(z''' + \ldots + z'^3), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y^{(n)} &= e^z(z^{(n)} + \ldots + z'^n),
\end{aligned}$$

les termes non écrits dans chaque parenthèse étant des polynômes contenant seulement les dérivées de z, et tels que celui qui cor-

respond à $y^{(n)}$, par exemple, ne dépende que des dérivées $z^{(n-1)}$, $z^{(n-2)}$, ..., z', et ne renferme z' qu'à des puissances inférieures à la $n^{\text{ième}}$. La raison de cette loi s'aperçoit immédiatement.

En substituant ces valeurs dans l'équation proposée, et divisant par y^m, on obtient une équation qui ne renferme plus que x, z', z'', ..., $z^{(n)}$, et qui rentre dans le cas du n° 870. On voit que l'on aurait eu immédiatement une équation d'ordre $n-1$, en posant

$$y = e^{\int u\,dx}.$$

Exemples. — 1° Soit l'équation

$$x^2 d^2y + x\,dx\,dy - y\,dx^2 = 0, \quad \text{ou} \quad x^2y'' + xy' - y = 0,$$

homogène du premier degré en y, y', y''. Elle devient, par la transformation précédente,

$$x^2(z'' + z'^2) + xz' - 1 = 0,$$

ou, en multipliant par $\dfrac{dx}{x}$,

$$x\,dz' + z'dx + (x^2z'^2 - 1)\frac{dx}{x} = 0,$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{d(xz')}{1 - x^2z'^2};$$

on en tire, en intégrant,

$$\frac{x^2}{C} = \frac{1 + xz'}{1 - xz'}, \quad \text{d'où} \quad z' = \frac{x^2 - C}{x(x^2 + C)} = \frac{2x}{x^2 + C} - \frac{1}{x},$$

$$z = \log\frac{x^2 + C}{C'x},$$

et, par suite,

$$y = C_1 x + \frac{C_2}{x},$$

C_1 et C_2 étant des constantes arbitraires.

On aurait pu intégrer cette équation en commençant par abaisser son ordre d'une unité [869], ce qui aurait donné

$$x^2y' - xy = C,$$

équation linéaire dont l'intégration conduit au même résultat que ci-dessus.

2° Une équation différentielle *linéaire sans second membre* [876],

(1) $$a_0 y + a_1 y' + \ldots + a_n y^{(n)} = 0,$$

est homogène par rapport à y et à ses dérivées, et, par suite, on peut abaisser son ordre d'une unité, en posant

$$y = e^{\int r\,dx},$$

r étant une nouvelle fonction inconnue. Par cette substitution, l'équation (1) devient, après la suppression du facteur $e^{\int r\,dx}$,

(2) $$(a_0 + a_1 r + \ldots + a_n r^n) + \ldots + a_n r^{(n-1)} = 0,$$

les termes non écrits qui suivent la parenthèse contenant tous en facteur quelqu'une des dérivées r', r'', ..., $r^{(n-2)}$ de r, en sorte que tous ces termes s'évanouissent, comme $a_n r^{(n-1)}$, lorsqu'on attribue à r une valeur constante.

L'équation (2) est d'un ordre moins élevé que la proposée, mais elle n'est plus linéaire. Elle peut servir cependant à trouver des intégrales particulières de la proposée, toutes les fois que son premier terme

$$a_0 + a_1 r + \ldots + a_n r^n = \varphi(r)$$

s'évanouit, quel que soit x, pour certaines valeurs constantes de r, c'est-à-dire lorsque l'équation

(3) $$\varphi(r) = 0$$

admet des racines constantes $r_1, r_2, \ldots$. Ces valeurs seront, en effet, des intégrales particulières de l'équation (2), et, par suite,

$$y_1 = e^{r_1 x}, \quad y_2 = e^{r_2 x}, \quad \ldots$$

seront des intégrales particulières de l'équation (1), au moyen desquelles on pourra abaisser l'ordre de cette équation [881], en lui conservant la forme linéaire.

Soit, par exemple, l'équation

$$2(1-x)y + (x^2-1)y' + x(2-x)y'' = 0;$$

l'équation (3) correspondante

$$2(1-x) + (x^2-1)r + x(2-x)r^2 = 0$$

admet la racine $r_1 = 1$, d'où il s'ensuit que la proposée admet l'intégrale particulière $y_1 = e^x$.

874. IV. *Équations homogènes par rapport à x, y et à leurs différentielles dx, dy, d^2y, ..., d^ny.*

On peut dire encore que ces équations sont homogènes lorsqu'on y considère x, y comme étant du degré 1, y' du degré zéro, y'' du degré -1, ..., $y^{(n)}$ du degré $-(n-1)$.

Une telle équation peut s'écrire sous la forme

$$x^m f\left(\frac{dx}{x}, \frac{y}{x}, \frac{dy}{x}, \frac{d^2y}{x}, \dots, \frac{d^ny}{x}\right) = 0.$$

Posons maintenant

$$\frac{dx}{x} = dt, \quad \text{ou} \quad x = e^t, \quad \text{et} \quad \frac{y}{x} = z, \quad y = e^t z.$$

On en tire

$$\frac{dy}{y} = dt + \frac{dz}{z}, \quad \frac{dy}{x} = \frac{dy}{y}\cdot\frac{y}{x} = z\,dt + dz,$$

ce que l'on peut écrire sous la forme

$$\frac{dy}{x} = dt(\mathrm{D}_t + 1)z.$$

On a ensuite

$$y' = \frac{x}{dx}\cdot\frac{dy}{x} = (\mathrm{D}_t + 1)z, \quad dy' = dt.(\mathrm{D}_t + 1)\mathrm{D}_t z,$$

$$\frac{d^2y}{x} = \frac{dx^2}{x}\,\frac{dy'}{dx} = \frac{dx}{x}\,dy' = dt^2.(\mathrm{D}_t + 1)\mathrm{D}_t z,$$

$$y'' = \frac{x}{dx^2}\,\frac{d^2y}{x} = e^{-t}.(\mathrm{D}_t + 1)\mathrm{D}_t z.$$

Pour avoir une formule générale, considérons l'expression

$$v = e^{-kt}\varphi(\mathrm{D}_t)z,$$

$\varphi(\mathrm{D}_t)$ désignant une fonction entière et rationnelle quelconque du facteur symbolique D_t. Comme on a évidemment

$$d.\varphi(\mathrm{D}_t)z = \varphi(\mathrm{D}_t)dz = dt.\mathrm{D}_t\varphi(\mathrm{D}_t)z,$$

on en conclut

$$dv = e^{-kt}dt.(\mathrm{D}_t - k)\varphi(\mathrm{D}_t)z.$$

De là on tire

$$dy'' = e^{-t}dt.(D_t+1)D_t(D_t-1)z,$$

d'où

$$\frac{d^3y}{x} = \left(\frac{dx}{x}\right)^2 x\,dy'' = dt^3(D_t+1)D_t(D_t-1)z,$$

et de même, en général, comme il est aisé de le vérifier,

$$\frac{d^ny}{x} = dt^n.(D_t+1)(D_t+0)(D_t-1)\ldots(D_t-n+3)(D_t-n+2)z.$$

Si l'on emploie la notation des factorielles [Livre I, Exercices, p. 273] en posant

$$r^{\lfloor n} = r(r-1)\ldots(r-n+1),$$

on pourra écrire la valeur précédente sous la forme abrégée

$$\frac{d^ny}{x} = dt^n.(D_t+1)^{\lfloor n}z.$$

On en tire

$$y^{(n)} = \frac{x}{dx^n}\frac{d^ny}{x} = e^{-(n-1)t}.(D_t+1)^{\lfloor n}z.$$

d'où

$$x^n y^{(n)} = e^t.(D_t+1)^{\lfloor n}z.$$

En substituant maintenant dans l'équation proposée ces valeurs de $\frac{dx}{x}$, $\frac{y}{x}$, $\frac{dy}{x}$, $\ldots$, $\frac{d^ny}{x}$, on obtiendra une équation dans laquelle (après la suppression du facteur x^m) la variable t n'entrera plus que par sa différentielle, et dont l'ordre pourra s'abaisser d'une unité, d'après ce que nous avons vu dans les n°s 871 et 872.

Exemples. — 1° L'équation traitée au n° 873,

$$x^2d^2y + x\,dx\,dy - y\,dx^2 = 0,$$

ou

$$x^2y'' + xy' - y = 0,$$

étant homogène par rapport à x, dx, y, dy, d^2y, deviendra, par les substitutions précédentes, en divisant par e^t,

$$(D_t+1)D_tz + (D_t+1)z - z = 0,$$

c'est-à-dire

$$z'' + 2z' = 0,$$

ou, en multipliant par dt,

$$dz' + 2z'dt = 0,$$

d'où

$$z' = Ce^{-2t};$$

par une nouvelle intégration, on a, en remplaçant $-\frac{C}{2}$ par C_1,

$$z = C_1 e^{-2t} + C_2,$$

d'où

$$y = x\left(\frac{C_1}{x^2} + C_2\right) = C_2 x + \frac{C_1}{x}.$$

2° Soit l'équation

$$nx^3 d^2y = (y\,dx - x\,dy)^2, \quad \text{ou} \quad n\frac{d^2y}{x} = \left(\frac{y}{x}\frac{dx}{x} - \frac{dy}{x}\right)^2.$$

On en tire

$$n\,dt^2(z'' + z') = [z\,dt - (z\,dt + dz)]^2, \quad \text{ou} \quad n(z'' + z') = z'^2,$$

$$n\frac{dz'}{dt} = z'^2 - nz', \quad \text{d'où} \quad dt = \frac{n\,dz'}{z'^2 - nz'},$$

$$t = \log\frac{z' - n}{Cz'}, \quad \frac{n}{z'} = \frac{n\,dt}{dz} = 1 - Ce^t,$$

ou, en mettant pour e^t et dt leurs valeurs x et $\frac{dx}{x}$,

$$\frac{n\,dx}{x\,dz} = 1 - Cx, \quad z = \frac{y}{x} = \int \frac{n\,dx}{x(1 - Cx)},$$

ou enfin

$$y = nx\log\frac{x}{C_1 x + C_2}.$$

Autrement, en employant la transformation du n° 872, on aurait pu mettre l'équation $n(z'' + z') = z'^2$ sous la forme

$$n\frac{z'dz'}{dz} = z'^2 - nz',$$

ou, en supprimant la solution $z' = 0$ (qui correspondrait à une intégrale particulière, pour $C_2 = 0$),

$$dz = \frac{n\,dz'}{z' - n}.$$

On en tire

$$z' = n + e^{\frac{z+C}{n}},$$

ou, en posant $e^{\frac{z+C}{n}} = u$,

$$dt = \frac{n\,du}{u(u+n)}, \quad \text{etc.}$$

875. V. *Équations qui deviennent homogènes, lorsqu'on y considère x et dx comme des quantités du premier degré, et y et ses différentielles $dy, d^2y, \ldots, d^ny$ comme des quantités du degré μ.*

Cela revient à considérer y comme une quantité du degré μ, y' comme étant du degré $\mu - 1, \ldots, y^{(n)}$ comme étant du degré $\mu - n$.

L'équation peut s'écrire sous la forme

$$x^m f\left(\frac{dx}{x}, \frac{y}{x^\mu}, \frac{dy}{x^\mu}, \ldots, \frac{d^ny}{x^\mu}\right) = 0.$$

Posons, comme précédemment,

$$\frac{dx}{x} = dt, \quad x = e^t, \quad \frac{y}{x^\mu} = z, \quad y = e^{\mu t} z.$$

On en tire

$$\frac{dy}{y} = \mu\,dt + \frac{dz}{z}, \quad \text{d'où} \quad \frac{dy}{x^\mu} = dt\left(\mu z + \frac{dz}{dt}\right) = dt(D_t + \mu)z,$$

$$y' = \frac{x^\mu}{dx} \cdot \frac{dy}{x^\mu} = e^{(\mu-1)t}(D_t + \mu)z,$$

d'où, en vertu de la formule générale démontrée dans le numéro précédent,

$$\frac{d^2y}{x^\mu} = \frac{dx^2}{x^\mu} \cdot \frac{dy'}{dx} = e^{-(\mu-1)t}dt^2 . e^{(\mu-1)t}(D_t + \mu)(D_t + \mu - 1)z$$
$$= dt^2 . (D_t + \mu)(D_t + \mu - 1)z.$$

En continuant ainsi, on trouvera généralement

$$\frac{d^ny}{x^\mu} = dt^n(D_t + \mu)(D_t + \mu - 1)\ldots(D_t + \mu - n + 1)z$$
$$= dt^n(D_t + \mu)^{\lfloor n} z,$$

d'où

$$\frac{d^n y}{dx^n} = e^{(\mu-n)t}(D_t+\mu)^{\underline{|n}} z.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans l'équation proposée, on arrivera, comme dans le cas précédent, à une équation ne contenant pas explicitement la variable indépendante t, et par suite susceptible d'abaissement.

Exemple. — Soit l'équation

$$x^4 d^2y = (x^3 + 2xy)\,dx\,dy - 4y^2 dx^2,$$

ou

$$\frac{d^2 y}{x^2} = \left(1 + 2\frac{y}{x^2}\right)\frac{dx}{x}\frac{dy}{x^2} - 4\frac{y^2}{x^4}\frac{dx^2}{x^2},$$

qui est de la forme ci-dessus, pour $\mu = 2$. La transformation donne

$$(D_t+2)(D_t+1)z = (1+2z)(D_t+2)z - 4z^2,$$
$$z'' + 3z' + 2z = (1+2z)(z'+2z) - 4z^2,$$
$$z'' - 2zz' + 2z' = 0,$$

ou, en employant la transformation du n° 872 et divisant par z', ce qui revient à mettre de côté l'intégrale particulière $z' = 0$,

$$\frac{dz'}{dz} - 2z + 2 = 0,$$

d'où l'on tire

$$z' = z^2 - 2z + C, \quad t + C' = \int \frac{d(z-1)}{(z-1)^2 + C} = \frac{1}{\sqrt{C}} \operatorname{arc\,tang} \frac{z-1}{\sqrt{C}},$$

expression qui deviendrait un logarithme pour $C < 0$. On en tire

$$z - 1 = \sqrt{C}\,\operatorname{tang}(t + C')\sqrt{C},$$

ou, en faisant $C' = \log C_1$,

$$y = x^2\left\{1 + \sqrt{C}\,\operatorname{tang}\left[\sqrt{C}(\log C_1 x)\right]\right\}.$$

CHAPITRE IV.

THÉORIE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES ENTRE DEUX VARIABLES.

§ I.

DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES D'ORDRE QUELCONQUE. PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DE CES ÉQUATIONS.

876. On appelle *équation différentielle linéaire* une équation différentielle dans laquelle la fonction inconnue et ses dérivées des divers ordres n'entrent qu'au premier degré et sans être multipliées entre elles.

Soit φ le signe caractéristique d'une fonction rationnelle et entière de degré n, à coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_n$ constants ou fonctions de la variable x. La forme générale d'une équation différentielle linéaire de l'ordre n, entre deux variables x et y, sera

$$\varphi(D_x)y = a_0 y + a_1 D_x y + \ldots + a_n D_x^n y = X,$$

X étant une fonction quelconque de x ou zéro.

Dans le cas où le terme X, indépendant de y et de ses dérivées, se réduit à zéro, l'équation, qui devient alors

$$\varphi(D_x)y = 0, \tag{1}$$

est dite une équation différentielle linéaire *homogène* ou *sans second membre*.

877. Une fonction y_1 de x, sans constante arbitraire, qui, substituée à y dans l'équation différentielle (1), rend le premier

membre de cette équation identiquement nul, est dite une *intégrale particulière* de cette équation différentielle.

Les propriétés principales des équations différentielles linéaires sans second membre sont exprimées par les propositions suivantes, dont les trois premières se vérifient immédiatement par simple substitution.

I. Si y_1 est une intégrale particulière de l'équation (1), le produit Cy_1 de cette intégrale par une constante quelconque sera aussi une intégrale de cette même équation.

II. Si $y_1, y_2, \ldots$ sont diverses intégrales particulières de l'équation (1), leur somme $y_1 + y_2 + \ldots$ sera aussi une intégrale de la même équation.

III. En combinant les deux propositions précédentes, on en conclut que, si y_1, y_2, ... sont des intégrales particulières de l'équation (1), et $C_1, C_2, \ldots$ des constantes quelconques, la somme

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots$$

sera encore une intégrale de l'équation (1).

878. IV. Soient

$$(2) \qquad y_1, \; y_2, \; \ldots, \; y_n$$

n intégrales particulières de l'équation (1). D'après ce qu'on vient de voir, la somme

$$(3) \qquad y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n$$

sera une intégrale de l'équation, renfermant n constantes arbitraires. Ce sera, de plus, l'intégrale générale de cette équation si les fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sont telles que, pour une valeur quelconque attribuée à x, on puisse déterminer les n constantes C_1, $C_2, \ldots, C_n$ de manière à faire prendre à y et à ses $n-1$ premières dérivées des valeurs arbitraires, c'est-à-dire si, pour toute valeur de x, on peut tirer des n équations

$$(4) \qquad \begin{cases} y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n, \\ y' = C_1 y'_1 + C_2 y'_2 + \ldots + C_n y'_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y^{(n-1)} = C_1 y_1^{(n-1)} + C_2 y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n y_n^{(n-1)} \end{cases}$$

des valeurs finies et déterminées des inconnues

$$C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n.$$

Pour cela, il est nécessaire et suffisant que le déterminant

$$R = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \ldots & y'_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

ne s'annule pas identiquement, quel que soit x.

Si l'on désigne par $Y_k^{(i)} = \frac{\partial R}{\partial y_k^{(i)}}$ le coefficient de $y_k^{(i)}$ dans la valeur de R, les valeurs des inconnues C_k seront données par les équations

$$(5)\quad RC_k = Y_k y + Y'_k y' + \ldots + Y_k^{(n-1)} y^{(n-1)}, \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

879. S'il existait entre les intégrales particulières (2) une *relation linéaire* quelconque *à coefficients constants,* c'est-à-dire une relation identique de la forme

$$(6)\qquad \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots = 0,$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ étant des constantes, alors une des lignes verticales de R serait formée par l'addition des produits de plusieurs autres lignes verticales, multipliées respectivement par des facteurs communs. Donc alors ce déterminant serait nul, et l'expression (3) ne serait plus l'intégrale générale de l'équation (1). Nous dirons, dans ce cas, que les intégrales particulières (2) ne sont pas *distinctes* entre elles.

On voit d'ailleurs aisément que, en vertu de la relation (6), l'équation (3) se réduit à

$$y = \left(C_2 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} C_1\right) y_2 + \left(C_3 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1} C_1\right) y_3 + \ldots,$$

expression qui ne renferme plus, en réalité, que $n-1$ constantes arbitraires, c'est-à-dire moins que n'en doit contenir l'intégrale générale.

880. On peut arriver, par la considération du déterminant R, à démontrer qu'en général la condition *nécessaire et suffisante*

pour que les intégrales particulières (2) soient distinctes est qu'il n'existe entre elles aucune relation linéaire identique, de la forme (6).

En effet, si les intégrales ne sont pas distinctes, auquel cas le déterminant R est nul, on sait qu'alors les équations

$$(7)\quad \begin{cases} u_1 y_1 + u_2 y_2 + \ldots + u_n y_n = 0, \\ u_1 y'_1 + u_2 y'_2 + \ldots + u_n y'_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ u_1 y_1^{(n-1)} + u_2 y_2^{(n-1)} + \ldots + u_n y_n^{(n-1)} = 0 \end{cases}$$

sont généralement compatibles entre elles pour des valeurs des inconnues $u_1, u_2, \ldots$ différentes de zéro, et que, de plus, ces valeurs sont proportionnelles aux déterminants partiels de R relatifs à une ligne horizontale quelconque, à la dernière par exemple, de sorte qu'on a

$$(8)\quad u_1 : u_2 : \ldots : u_n = Y_1^{(n-1)} : Y_2^{(n-1)} : \ldots : Y_n^{(n-1)}.$$

Différentions maintenant chacune des équations (7), en ayant égard à celle qui la suit; il viendra

$$(9)\quad \begin{cases} u'_1 y_1 + u'_2 y_2 + \ldots + u'_n y_n = 0, \\ u'_1 y'_1 + u'_2 y'_2 + \ldots + u'_n y'_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ u'_1 y_1^{(n-2)} + u'_2 y_2^{(n-2)} + \ldots + u'_n y_n^{(n-2)} = 0, \end{cases}$$

$$(10)\quad \begin{cases} \quad u'_1 y_1^{(n-1)} + u'_2 y_2^{(n-1)} + \ldots + u'_n y_n^{(n-1)} \\ + u_1 y_1^{(n)} + u_2 y_2^{(n)} + \ldots + u_n y_n^{(n)} = 0. \end{cases}$$

Or, si l'on différentie la valeur de R, on voit que la dérivée $D_x R$ se réduit à

$$(11)\quad \begin{cases} D_x R = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \ldots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \ldots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} \\ \quad = Y_1^{(n-1)} y_1^{(n)} + Y_2^{(n-1)} y_2^{(n)} + \ldots + Y_n^{(n-1)} y_n^{(n)}, \end{cases}$$

et, cette quantité étant nulle, puisque R est supposé s'annuler quel que soit x, on en conclut, en vertu des proportions (8), que

la seconde ligne

$$u_1 y_1^{(n)} + u_2 y_2^{(n)} + \ldots + u_n y_n^{(n)}$$

de l'équation (10) est nulle. En supprimant donc cette seconde ligne, les équations (9) et (10) forment alors un système identique à celui des équations (7), d'où il résulte que les inconnues u'_1, u'_2, ..., u'_n sont proportionnelles aux inconnues u_1, u_2, ..., u_n. On peut donc poser

$$\frac{u'_1}{u_1} = \frac{u'_2}{u_2} = \ldots = \frac{u'_n}{u_n} = \rho,$$

d'où l'on tire, en intégrant, et désignant par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ des constantes,

$$u_1 = \alpha_1 e^{\int \rho dx}, \quad u_2 = \alpha_2 e^{\int \rho dx}, \quad \ldots, \quad u_n = \alpha_n e^{\int \rho dx}.$$

En substituant ces valeurs dans la première des équations (7), et supprimant le facteur $e^{\int \rho dx}$, qui n'est pas nul, on a l'identité

$$(6) \qquad \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_n y_n = 0,$$

qui est une conséquence réciproque de l'hypothèse $R = 0$.

Donc l'identité (6) exprime la condition nécessaire et suffisante pour que les intégrales particulières (2) ne soient pas distinctes entre elles.

881. V. Si l'on connaît une intégrale particulière de l'équation (1), cette intégrale étant supposée *autre que zéro*, on pourra, par son moyen, ramener l'intégration de l'équation (1), ou, plus généralement, celle de l'équation

$$(A) \qquad \varphi(D_x) y = X,$$

à celle d'une équation de même forme, mais d'un ordre inférieur d'une unité.

Soit, en effet, y_1 une intégrale particulière quelconque, différente de zéro, de l'équation (1). Posons

$$y = y_1 z,$$

d'où l'on tire, par la formule de Leibnitz,

$$
\begin{aligned}
y' &= z.D_x y_1 + z'.y_1,\\
y'' &= z.D_x^2 y_1 + 2z'.D_x y_1 + z''.y_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y^{(n)} &= z.D_x^n y_1 + \frac{z'}{1}.nD_x^{n-1}y_1\\
&+ \frac{z''}{1.2}.n(n-1)D_x^{n-2}y_1 + \ldots + \frac{z^{(n)}}{n!}n(n-1)\ldots 1.D_x^n y_1.
\end{aligned}
$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (A), elle devient

$$
\text{(B)}\quad \begin{cases} z.\varphi(D_x)y_1 + \dfrac{z'}{1}\varphi'(D_x)y_1 + \dfrac{z''}{1.2}\varphi''(D_x)y_1 + \ldots \\ \qquad\qquad + \dfrac{z^{(n)}}{n!}\varphi^{(n)}(D_x)y_1 = X. \end{cases}
$$

Le premier terme du premier membre de cette équation s'évanouit identiquement, puisque y_1 est supposé être une intégrale de l'équation (1). Dès lors l'équation (B) ne contiendra plus z, mais seulement ses dérivées z', z'', ..., $z^{(n)}$; si donc on pose $z' = s$, l'équation (B) se changera en une équation en s de l'ordre $n-1$, et de la forme

(12) $$\chi(D_x)s = 0, \quad \text{ou} \quad \chi(D_x)s = X.$$

Donc, si l'on pose $y = y_1 \int s\,dx$, l'équation (A) se changera en une équation de même forme, relative à la fonction s, d'un ordre inférieur d'une unité, et ayant le même second membre.

Ainsi la connaissance d'une intégrale particulière de l'équation (1) permet d'abaisser d'une unité l'ordre de cette équation, ainsi que l'ordre de l'équation complète (A), en ramenant ces équations à des équations de mêmes formes respectives, mais d'ordre inférieur.

Les coefficients de l'équation transformée sont constants lorsque ceux de l'équation proposée le sont.

Exemple. — L'équation

$$2(1-x)y + (x^2-2)y' + x(2-x)y'' = 0$$

étant vérifiée par l'intégrale particulière $y_1 = x^2$, il vient, en

substituant dans cette équation l'expression $u = x^2 \int s\,dx$, et divisant par x^2,

$$(6 - 4x + x^2)s + (2 - x)x.s' = 0,$$

ou

$$\frac{ds}{s} + \frac{x^2 - 4x + 6}{x(2 - x)}\,dx = 0,$$

d'où l'on tire

$$s = Ce^x . \frac{x - 2}{x^3}.$$

On a maintenant

$$\int s\,dx = C\int e^x\left(\frac{dx}{x^2} - \frac{2\,dx}{x^3}\right)$$

$$= C\left(\int \frac{e^x\,dx}{x^2} + \frac{e^x}{x^2} - \int \frac{e^x\,dx}{x^2}\right) = C\frac{e^x}{x^2} + C';$$

donc

$$y = x^2 \int s\,dx = Ce^x + C'x^2.$$

882. Il est aisé de vérifier que, si l'on prend pour s l'intégrale générale de l'équation (12), la valeur $y = y_1 \int s\,dx$ sera l'intégrale générale de l'équation (1). En effet, $z = \int s\,dx + C$ sera l'intégrale générale de l'équation en z, et l'on pourra, au moyen des constantes arbitraires, déterminer à volonté, pour une valeur donnée de x, les valeurs de $z = \frac{y}{y_1}$ et de ses $n - 1$ premières dérivées, d'où l'on conclura facilement que l'on pourra aussi déterminer à volonté y et ses $n - 1$ premières dérivées.

Donc, en mettant en évidence la constante d'intégration, on voit que l'intégrale générale de l'équation (1) est de la forme

(13) $$y = C_1 y_1 + y_1 \int s\,dx.$$

883. Si l'on connaît une seconde intégrale particulière y_2 de l'équation (1), alors $s_1 = D_x \frac{y_2}{y_1}$ sera une valeur particulière de $s = D_x \frac{y}{y_1}$, et, par conséquent, on connaîtra une intégrale particulière de l'équation (12), intégrale qui sera différente de zéro si le rapport $\frac{y_2}{y_1}$ n'est pas constant, c'est-à-dire si les intégrales particulières y_1, y_2 ne satisfont pas à une relation linéaire à coeffi-

cients constants de la forme $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = 0$. On pourra donc alors, en posant

$$s = s_1 \int t\, dx,$$

ramener l'équation (12) à une équation de même forme et d'ordre moindre d'une unité,

$$(14) \qquad \psi(D_x)\, t = 0, \quad \text{ou} \quad \psi(D_x)\, t = X.$$

En substituant dans l'expression (13) la valeur

$$s = C_2 s_1 + s_1 \int t\, dx,$$

et ayant égard à ce que $\frac{y_2}{y_1} = \int s_1 dx$, cette expression prend la forme

$$(15) \qquad y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + y_1 \int s_1 dx \int t\, dx,$$

chaque signe d'intégration, dans le second membre, portant sur tout ce qui le suit, considéré comme un résultat effectué.

De même, si l'on connaît trois intégrales particulières y_1, y_2, y_3 de l'équation (1), on en déduira deux intégrales particulières

$$s_1 = D_x \frac{y_2}{y_1}, \quad s_2 = D_x \frac{y_3}{y_1}$$

de l'équation (12), lesquelles ne seront pas nulles si les rapports $\frac{y_2}{y_1}, \frac{y_3}{y_1}$ ne sont pas constants. De ces deux intégrales on tirera une intégrale particulière $t_1 = D_x \frac{s_2}{s_1}$ de l'équation (14), et t_1 ne sera pas nul si $\frac{s_2}{s_1}$ n'est pas constant, c'est-à-dire si l'on n'a pas

$$D_x \frac{y_3}{y_1} = \alpha . D_x \frac{y_2}{y_1}, \quad \text{d'où} \quad y_3 = \alpha y_2 + \beta y_1,$$

α et β étant des constantes, ou enfin si les trois intégrales y_1, y_2, y_3 ne satisfont pas à une relation linéaire à coefficients constants de la forme de la relation (6). On pourra donc alors, en posant $t = t_1 \int u\, dx$, abaisser encore d'une unité l'ordre de l'équa-

tion (14). On aura alors, à cause de $\frac{s_2}{s_1} = \int t_1\,dx$, $\frac{y_3}{y_1} = \int s_2\,dx$,

$$t = C_3 t_1 + t_1 \int u\,dx, \quad s = C_2 s_1 + C_3 s_2 + s_1 \int t_1\,dx \int u\,dx,$$

$$(16) \qquad y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + y_1 \int s_1\,dx \int t_1\,dx \int u\,dx,$$

chaque signe d'intégration portant sur tout ce qui le suit.

En continuant ainsi, on voit que, si l'on connaît k intégrales particulières $y_1, y_2, \ldots, y_k$ de l'équation (1), et que ces intégrales ne satisfassent à aucune équation à coefficients constants de la forme $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_k y_k = 0$, on pourra, par leur moyen, abaisser de k unités l'ordre de l'équation proposée, et l'intégrale générale se présentera sous la forme

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_k y_k + y_1 \int s_1\,dx \int t_1\,dx \int \ldots \int v\,dx,$$

v étant l'intégrale générale d'une équation linéaire sans second membre d'ordre $n - k$.

Si l'on connaît $n - 1$ intégrales particulières distinctes [880], on parviendra, pour y, à une valeur de la forme

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_{n-1} y_{n-1} + y_1 \int s_1\,dx \int t_1\,dx \int \ldots \int w\,dx,$$

w étant l'intégrale générale d'une équation du premier ordre, telle que

$$(17) \qquad h_0 w + h_1 w' = 0 \text{ ou } = X.$$

Cette dernière équation peut s'intégrer immédiatement et faire connaître une $n^{\text{ième}}$ intégrale particulière de l'équation (1), distincte des précédentes. Si l'on désigne, en effet, par

$$w_1 = e^{-\int \frac{h_0}{h_1} dx}$$

une intégrale particulière de l'équation (17) sans second membre, $w = C_n w_1$ sera l'intégrale générale de cette même équation; et, en représentant par y_n l'intégrale particulière de l'équation (1),

$$y_n = y_1 \int s_1\,dx \int t_1\,dx \int \ldots \int w_1\,dx,$$

on obtiendra l'intégrale générale de (1) sous la forme

$$(3) \qquad y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n.$$

De même,

$$w = C_1 w_1 + w_1 \int e^{\int \frac{h_0}{h_1} dx} \frac{X}{h_1} dx$$

sera l'intégrale générale de l'équation $h_0 w + h_1 w' = X$, et, par suite,

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n + y_1 \int s_1 dx \int t_1 dx \int \ldots \int w_1 dx \int e^{\int \frac{h_0}{h_1} dx} \frac{X}{h_1} dx$$

sera l'intégrale générale de l'équation (A).

884. Si l'on suppose, dans cette dernière expression, toutes les constantes arbitraires nulles, on aura une intégrale particulière

$$Y = y_1 \int s_1 dx \int t_1 dx \int \ldots \int w_1 dx \int e^{\int \frac{h_0}{h_1} dx} \frac{X}{h_1} dx$$

de l'équation complète (A). On voit donc que l'intégrale générale de l'équation complète (A) est égale à l'intégrale générale de l'équation homogène (1), plus une intégrale particulière Y de l'équation (A).

On a ainsi ce théorème général :

Si Y *est une intégrale particulière quelconque de l'équation complète* (1), *et si* $y^{(0)}$ *représente l'intégrale générale de l'équation sans second membre* (2), *la somme*

$$(18) \qquad y = Y + y^{(0)}$$

sera l'intégrale générale de l'équation (A).

C'est ce que l'on peut d'ailleurs démontrer directement.

En effet, 1° la valeur (18) satisfait à l'équation (A), comme il est facile de s'en assurer; 2° pour $x = x_0$, on peut, à l'aide des valeurs arbitraires des constantes, déterminer arbitrairement les valeurs de $y^{(0)} = y - Y$ et de ses $n - 1$ premières dérivées, et, par suite, aussi celles de y et de ses $n - 1$ premières dérivées.

Pour montrer une application de ce théorème, supposons que, dans l'équation (1), le rapport $\frac{X}{a_0}$ soit constant et $= \alpha$. Si l'on suppose $y = Y =$ const., l'équation se réduira à $a_0 Y = X$, d'où $Y = \alpha$.

Donc, dans ce cas, l'intégrale générale de l'équation (1) sera

$$y = \alpha + y^{(0)}.$$

885. Si la solution $y = y_1$ annule non-seulement l'expression $\varphi(D_x)y_1$, mais encore les $k-1$ expressions $\varphi'(D_x)y_1, \ldots, \varphi^{(k-1)}(D_x)y_1$, alors le développement de $\varphi(D_x)(y_1 z)$ se réduira à

$$\left(\frac{\varphi^{(k)}(D_x)y_1}{1.2\ldots k} + \frac{\varphi^{(k+1)}(D_x)y_1}{1.2\ldots(k+1)} D_x + \ldots + \frac{\varphi^{(n)}(D_x)y_1}{1.2\ldots n} D_x^{n-k}\right) z^{(k)},$$

et ce développement s'annulera pour $z^{(k)} = 0$, d'où

$$z = C + C'x + \ldots + C^{(k-1)}x^{k-1}.$$

Donc, si la solution y_1 satisfait aux k équations

$$\varphi(D_x)y = 0, \quad \varphi'(D_x)y = 0, \quad \ldots, \quad \varphi^{(k-1)}(D_x)y = 0,$$

cette solution fournira k intégrales particulières

$$y_1, \; xy_1, \; \ldots, \; x^{k-1}y_1$$

de l'équation (1), et, par son moyen, l'ordre de l'équation différentielle pourra s'abaisser immédiatement de k unités.

886. VI. Réciproquement, on voit aisément que l'intégrale générale de l'équation (1) peut toujours se mettre sous la forme (3) d'une somme de n intégrales particulières distinctes, multipliées respectivement par des constantes arbitraires.

Il suffit, pour cela, d'admettre que toute équation linéaire sans second membre de la forme (1) est susceptible d'une solution autre que zéro, ce qui résulte de ce que nous avons démontré au nº 809. D'après cette proposition, l'équation (1) admet une intégrale particulière y_1, au moyen de laquelle on peut mettre l'intégrale générale sous la forme (13), s étant l'intégrale générale de (12). Cette dernière équation admettant une intégrale particulière s_1 autre que zéro, il en résulte une seconde intégrale particulière $y_2 = y_1 \int s_1 dx$ de l'équation (1), dont l'intégrale générale prendra la forme (15), t étant l'intégrale générale de (14). En continuant ainsi, on finira par mettre l'intégrale générale de (1) sous la forme (3), $y_1, y_2, \ldots, y_n$ étant des intégrales particulières de (1), toutes distinctes entre elles.

Donc aussi l'intégrale générale de l'équation (A) peut toujours se mettre sous la forme

$$y = C_1 y_1 + C_1 y_1 + \ldots + C_n y_n + Y,$$

$y_1, y_2, \ldots$ étant des intégrales particulières de l'équation homogène, et Y une intégrale particulière de l'équation complète.

887. VII. Une équation linéaire sans second membre ne peut admettre de solution singulière; car, si y_1 est une solution quelconque de l'équation (1), en lui appliquant les calculs des numéros précédents, on la fera entrer dans une expression telle que (3) de l'intégrale générale, et cette expression se réduira à y_1, si l'on y suppose la constante $C_1 = 1$ et toutes les autres constantes $= 0$. Donc la solution y_1 est une intégrale particulière.

888. VIII. Nous venons de voir qu'une équation différentielle linéaire sans second membre présente avec une équation algébrique cette analogie, que son ordre peut s'abaisser de k unités lorsqu'on en connaît k intégrales particulières, de même que le degré d'une équation algébrique peut s'abaisser de k unités lorsqu'on en connaît k racines.

Là ne s'arrête pas l'analogie. Il est facile, par exemple, de trouver la composition des coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_n$ de l'équation différentielle linéaire (1) au moyen des n intégrales particulières distinctes $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Si l'on substitue, en effet, ces n intégrales successivement dans l'équation (1), on obtient, pour déterminer les n inconnues $\frac{a_1}{a_n}$, $\frac{a_2}{a_n}, \ldots, \frac{a_{n-1}}{a_n}$, les n équations

$$\frac{a_0}{a_n} y_1 + \frac{a_1}{a_n} y_1' + \ldots + \frac{a_{n-1}}{a_n} y_1^{(n-1)} = -y_1^{(n)},$$

$$\frac{a_0}{a_n} y_2 + \frac{a_1}{a_n} y_2' + \ldots + \frac{a_{n-1}}{a_n} y_2^{(n-1)} = -y_2^{(n)},$$

. . . . ,

$$\frac{a_0}{a_n} y_n + \frac{a_1}{a_n} y_n' + \ldots + \frac{a_{n-1}}{a_n} y_n^{(n-1)} = -y_n^{(n)},$$

d'où l'on tire, en conservant les notations du n° 878,

$$-R\frac{a_k}{a_n} = Y_1^{(k)}y_1^{(n)} + Y_2^{(k)}y_2^{(n)} + \ldots + Y_n^{(k)}y_n^{(n)}.$$

Remarquons que, pour $k = n-1$, cette formule devient

$$-R\frac{a_{n-1}}{a_n} = Y_1^{(n-1)}y_1^{(n)} + Y_2^{(n-1)}y_2^{(n)} + \ldots + Y_n^{(n-1)}y_n^{(n)},$$

c'est-à-dire [880, (11)]

$$-R\frac{a_{n-1}}{a_n} = D_x R, \quad \text{d'où} \quad \frac{a_{n-1}}{a_n} = -\frac{d\log R}{dx}.$$

Réciproquement, étant donné le coefficient $\frac{a_{n-1}}{a_n}$, on en déduit

$$R = Ce^{-\int\frac{a_{n-1}}{a_n}dx}.$$

Exemple. — Former une équation différentielle linéaire qui admette les intégrales particulières

$$y_1 = e^x, \quad y_2 = x.$$

On tire de là

$$y_1' = e^x, \quad y_2' = 1,$$
$$y_1'' = e^x, \quad y_2'' = 0,$$

d'où

$$R = \begin{vmatrix} e^x & x \\ e^x & 1 \end{vmatrix} = e^x(1-x), \quad -R\frac{a_1}{a_2} = \begin{vmatrix} e^x & x \\ e^x & 0 \end{vmatrix} = -xe^x, \quad -R\frac{a_0}{a_2} = \begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & 1 \end{vmatrix} = e^x.$$

L'équation cherchée sera donc

$$y - xy' + (x-1)y'' = 0.$$

§ II.

INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES SANS SECOND MEMBRE A COEFFICIENTS CONSTANTS, ET DES ÉQUATIONS QUI SE RAMÈNENT A CELLES-LA.

889. Si, dans la transformation du n° 881, on remplace y_1 par une exponentielle e^{rx}, où r désigne une constante indéterminée, alors $D_x^n . e^{rx} = r^n . e^{rx}$, de sorte que l'opération D_x^n équivaut à une

multiplication par r^n, et, par suite, l'opération $\varphi(D_x)$ à une multiplication par le polynôme $\varphi(r)$. Donc, par la substitution

$$y = ze^{rx},$$

l'équation différentielle homogène

(1) $$\varphi(D_x)y = 0$$

deviendra

(2) $$e^{rx}\left[\varphi(r) + \frac{\varphi'(r)}{1} D_x + \frac{\varphi''(r)}{2!} D_x^2 + \ldots + \frac{\varphi^{(n)}(r)}{n!} D_x^n\right] z = 0,$$

ce que l'on peut représenter, sous une forme abrégée, par

$$e^{rx}\varphi(r + D_x)z = 0.$$

Si l'équation

(3) $$\varphi(r) = 0$$

admet une racine *constante* r_1, l'équation (2) sera évidemment vérifiée par la supposition $D_x z = 0$, $z = C$, et, par suite, l'équation (1) admettra l'intégrale particulière

$$y_1 = Ce^{r_1 x}.$$

Ainsi, lorsque l'équation (3) admet plusieurs racines constantes différentes $r_1, r_2, \ldots$, on obtiendra, pour l'équation différentielle (1), autant d'intégrales particulières distinctes

$$y_1 = C_1 e^{r_1 x}, \quad y_2 = C_2 e^{r_2 x}, \quad \ldots.$$

Exemple. — Si l'on propose l'équation différentielle

$$y - xy' + (x - 1)y'' = 0,$$

l'équation $\varphi(r) = 0$, qui lui correspond, sera

$$1 - xr + (x - 1)r^2 = 0,$$

d'où l'on tire les racines $r_1 = 1$, $r_2 = \frac{1}{x - 1}$. La racine r_1 étant constante, on en conclut que l'équation proposée admet l'intégrale particulière $y_1 = e^x$, à l'aide de laquelle on abaissera [881] l'équation proposée au premier ordre.

890. En ayant égard à l'équation (3), et posant $D_x z = s$, l'équation (2) prendra la forme

$$(4) \qquad \chi(D_x)s = (b_0 + b_1 D_x + \ldots + b_{n-1} D_x^{n-1})\, s = 0,$$

et, si l'on fait maintenant $s = e^{px} w$, cette équation deviendra

$$(5) \qquad e^{px}\left[\chi(p) + \frac{\chi'(p)}{1} D_x + \ldots + \frac{\chi^{(n-1)}(p)}{(n-1)!} D_x^{n-1}\right] w = 0.$$

Lorsque l'équation

$$(6) \qquad \chi(p) = 0$$

admet une racine constante p_1, l'équation (5) sera vérifiée par $w = C'$, et l'équation (4) par $s = C' e^{p_1 x}$. Donc l'équation proposée (1) sera vérifiée par $y = C' e^{(r_1+p_1)x}$, c'est-à-dire pour $r = r_1 + p_1$ et $z = C'$. Il faut donc que l'on ait $\varphi(r_1 + p_1) = 0$, et, par suite, que $r_1 + p_1 = r_2$ soit une seconde racine de l'équation (3).

Réciproquement, si r_1 et r_2 sont deux racines constantes de l'équation (3), $p_1 = r_2 - r_1$ devra être une racine de l'équation (6), et, par suite, $e^{(r_2 - r_1)x}$ une solution de l'équation (5).

En continuant ainsi, on abaissera successivement l'ordre de l'équation (1) jusquà ce que l'on ait épuisé toutes les racines constantes de l'équation $\varphi(r) = 0$.

Nous supposons ici que ces racines $r_1, r_2, \ldots$ soient des racines simples. Nous traiterons plus loin le cas où ces racines seraient multiples.

891. Si l'équation (1) est à *coefficients constants*, c'est-à-dire si $\frac{a_0}{a_n}, \frac{a_1}{a_n}, \ldots, \frac{a_{n-1}}{a_n}$ sont des constantes, alors l'équation (3) aura n racines constantes $r_1, r_2, \ldots, r_n$, et, si ces n racines sont inégales, il en résultera n intégrales particulières distinctes

$$y_1 = e^{r_1 x}, \quad y_2 = e^{r_2 x}, \quad \ldots, \quad y_n = e^{r_n x}$$

de l'équation proposée. L'intégrale générale de celle-ci sera donc [878]

$$(7) \qquad y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \ldots + C_n e^{r_n x}.$$

Il est aisé de s'assurer que les intégrales $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sont réellement distinctes quand les racines $r_1, r_2, \ldots, r_n$ sont inégales. Si nous formons, en effet, les équations (4) du n° 878, elles deviennent

$$\begin{aligned} y &= C_1 e^{r_1 x} + \ldots + C_n e^{r_n x}, \\ y' &= r_1 C_1 e^{r_1 x} + \ldots + r_n C_n e^{r_n x}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y^{(n-1)} &= r_1^{n-1} C_1 e^{r_1 x} + \ldots + r_n^{n-1} C_n e^{r_n x}, \end{aligned}$$

ou, en posant, pour plus de simplicité, $\xi_1 = C_1 e^{r_1 x}, \ldots, \xi_n = C_n e^{r_n x}$,

$$(8) \qquad \begin{cases} y = \xi_1 + \ldots + \xi_n, \\ y' = r_1 \xi_1 + \ldots + r_n \xi_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y^{(n-1)} = r_1^{n-1} \xi_1 + \ldots + r_n^{n-1} \xi_n. \end{cases}$$

Le déterminant de ces équations

$$R = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ r_1 & r_2 & \ldots & r_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r_1^{n-1} & r_2^{n-1} & \ldots & r_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{cases} (r_2 - r_1)(r_3 - r_1)\ldots(r_n - r_1) \\ \quad \times (r_3 - r_2)\ldots(r_n - r_2) \\ \quad \times \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad \times (r_n - r_{n-1}) \end{cases}$$

[130] n'est pas nul, puisque aucun de ses facteurs ne l'est. Donc les intégrales particulières en question sont distinctes, et l'intégrale générale de l'équation est bien de la forme (7).

892. Pour obtenir la résolution complète des équations (8), considérons la fonction

$$\varphi(\rho) = a_0 + a_1 \rho + \ldots + a_n \rho^n = a_n (\rho - r_1)(\rho - r_2)\ldots(\rho - r_n),$$

et formons les coefficients du quotient de la division de $\varphi(\rho)$ par $\rho - r$, ordonné suivant les puissances de ρ, savoir

$$\begin{aligned} \varphi_1(\rho) &= a_1 + a_2 \rho + \ldots + a_{n-1} \rho^{n-2} + a_n \rho^{n-1}, \\ \varphi_2(\rho) &= a_2 + a_3 \rho + \ldots + a_n \rho^{n-2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \varphi_{n-1}(\rho) &= a_{n-1} + a_n \rho, \\ \varphi_n(\rho) &= a_n. \end{aligned}$$

On a, comme on peut s'en assurer en multipliant ces égalités respectivement par $1, r, \ldots, r^{n-2}, r^{n-1}$, et faisant la somme, l'identité

$$\varphi_1(\rho) + r\varphi_2(\rho) + \ldots + r^{n-2}\varphi_{n-1}(\rho) + r^{n-1}\varphi_n(\rho) = \frac{\varphi(\rho) - \varphi(r)}{\rho - r}.$$

Si l'on donne à r successivement les valeurs $r_1, r_2, \ldots, r_n$, $\varphi(r)$ s'annule, et l'on a

$$\varphi_1(\rho) + r_1\varphi_2(\rho) + \ldots + r_1^{n-1}\varphi_n(\rho) = \frac{\varphi(\rho)}{\rho - r_1},$$

$$\varphi_1(\rho) + r_2\varphi_2(\rho) + \ldots + r_2^{n-1}\varphi_n(\rho) = \frac{\varphi(\rho)}{\rho - r_2},$$

. . . .,

$$\varphi_1(\rho) + r_n\varphi_2(\rho) + \ldots + r_n^{n-1}\varphi_n(\rho) = \frac{\varphi(\rho)}{\rho - r_n}.$$

Si l'on ajoute maintenant ces égalités après les avoir multipliées respectivement par $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, et que l'on pose

$$y\varphi_1(\rho) + y'\varphi_2(\rho) + \ldots + y^{(n-1)}\varphi_n(\rho) = \mathrm{F}(\rho),$$

les équations (5) donneront

$$\mathrm{F}(\rho) = \varphi(\rho)\left(\frac{\xi_1}{\rho - r_1} + \frac{\xi_2}{\rho - r_2} + \ldots + \frac{\xi_n}{\rho - r_n}\right),$$

d'où l'on tire

$$\frac{\mathrm{F}(\rho)}{\varphi(\rho)} = \frac{\xi_1}{\rho - r_1} + \frac{\xi_2}{\rho - r_2} + \ldots + \frac{\xi_n}{\rho - r_n}.$$

De cette identité il résulte que $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ sont les numérateurs des fractions simples dans lesquelles se décompose la fonction rationnelle $\frac{\mathrm{F}(\rho)}{\varphi(\rho)}$. On a donc [412]

$$\xi_1 = \frac{\mathrm{F}(r_1)}{\varphi'(r_1)}, \quad \ldots, \quad \xi_n = \frac{\mathrm{F}(r_n)}{\varphi'(r_n)},$$

valeurs finies et déterminées, quand les racines $r_1, r_2, \ldots, r_n$ sont inégales.

893. Si l'équation (3) a des racines complexes, l'intégrale (7) peut se ramener à la forme réelle. Considérons, en effet, deux

racines conjuguées

$$r_1 = p + qi, \quad r_2 = p - qi.$$

La partie de l'intégrale (4) qui dépend de ces racines,

$$C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x},$$

pourra s'écrire sous la forme

$$(C_1 + C_2) e^{px} \cos qx + (C_1 - C_2) i e^{px} \sin qx = e^{px}(C' \cos px + C'' \sin px),$$

C' et C'' désignant de nouvelles constantes arbitraires.

Si l'on pose

$$C' = K \cos L, \quad C'' = K \sin L,$$

cette expression deviendra

$$K e^{px} \cos(qx - L),$$

K et L étant encore des constantes arbitraires.

Exemple. — Soit l'équation

$$a^2 y + y'' = 0.$$

L'équation en r correspondante, $a^2 + r^2 = 0$, a pour racines $r_1 = ai$ et $r_2 = -ai$. Par suite, l'intégrale générale sera

$$y = C_1 e^{axi} + C_2 e^{-axi} = C' \cos ax + C'' \sin ax = K \cos(ax - L).$$

894. Si l'équation (3) a k racines égales $r_1 = r_2 = \ldots = r_k$, l'expression (7) aura k de ses termes qui se confondront en un seul $(C_1 + C_2 + \ldots + C_k) e^{r_1 x}$, et elle ne contiendra plus le nombre de constantes nécessaire pour représenter l'intégrale générale.

Mais, dans ce cas, la valeur $r = r_1$ fait évanouir la fonction $\varphi(r)$ et ses $k-1$ premières dérivées, et l'équation transformée (2) se réduit à

$$e^{r_1 x}\left[\frac{\varphi^{(k)}(r_1)}{k!} + \frac{\varphi^{(k+1)}(r)}{(k+1)!} D_x + \ldots + \frac{\varphi^{(n)}(r_1)}{n!} D_x^{n-k}\right] z^{(k)} = 0.$$

Cette équation est vérifiée [885] par

$$z^{(k)} = 0, \quad \text{d'où} \quad z = C + C'x + \ldots + C^{(k-1)} x^{k-1},$$

et, par suite, la racine r_1 correspond à l'intégrale

$$y = (C + C'x + \ldots + C^{(k-1)}x^{k-1})e^{r_1 x},$$

qui contient le même nombre de constantes arbitraires et équivaut au même nombre d'intégrales particulières distinctes que le résultat fourni par les racines $r_1, r_2, \ldots, r_k$, si elles avaient été inégales.

895. On peut encore obtenir une autre forme remarquable des intégrales particulières distinctes fournies par une racine multiple de l'équation (3). Si, dans le premier membre de l'équation (1), on fait $y = e^{rx}$, r désignant une quantité quelconque indépendante de x, on aura identiquement

$$\varphi(D_x)y = e^{rx}\varphi(r).$$

En différentiant cette identité $k - 1$ fois de suite par rapport à r, il viendra

$$\varphi(D_x)\frac{\partial y}{\partial r} \quad = e^{rx}(x + D_r)\varphi(r),$$

$$\varphi(D_x)\frac{\partial^2 y}{\partial r^2} \quad = e^{rx}(x + D_r)^2\varphi(r),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\varphi(D_x)\frac{\partial^{k-1} y}{\partial r^{k-1}} = e^{rx}(x + D_r)^{k-1}\varphi(r).$$

Si, pour $r = r_1$, les k fonctions $\varphi(r)$, $\varphi'(r)$, $\ldots$, $\varphi^{(k-1)}r$ s'évanouissent, on voit que les seconds membres de toutes ces égalités se réduiront à zéro, et par suite, l'équation (1) sera vérifiée non-seulement par la valeur $y_1 = e^{r_1 x}$, mais encore par les $k - 1$ premières dérivées de la valeur e^{rx} par rapport à r, dans lesquelles on fera ensuite $r = r_1$, c'est-à-dire que l'on aura, pour la racine r_1, k intégrales particulières, en faisant $r = r_1$ dans les expressions

$$y = e^{rx}, \quad \frac{\partial y}{\partial r} = xe^{rx}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{k-1} y}{\partial r^{k-1}} = x^{k-1}e^{rx}.$$

896. On peut vérifier, comme au n° 892, que les intégrales particulières obtenues par les formules précédentes, dans le cas où l'équation (3) a des racines multiples, sont bien réellement

distinctes entre elles, et arriver de même à la résolution des équations par rapport aux constantes arbitraires.

Soit r_1 une racine k-uple. Posons

$$\xi_1 = (C + C'x + \ldots + C^{(k-1)}x^{k-1})e^{r_1 x} = X e^{r_1 x},$$

d'où

$$\frac{d\xi_1}{dx} = e^{r_1 x}(r_1 + D_x)X = r_1\xi_1 + \xi_2,$$

en faisant $\xi_2 = \frac{dX}{dx}e^{r_1 x}$;

$$\frac{d^2\xi_1}{dx^2} = e^{r_1 x}(r_1 + D_x)^2 X = r_1^2\xi_1 + 2r_1\xi_2 + \xi_3,$$

en faisant $\xi_3 = \frac{d^2X}{dx^2}e^{r_1 x}$; et, en général,

$$\begin{aligned}\frac{d^{k-1}\xi_1}{dx^{k-1}} &= e^{r_1 x}(r + D_\xi)^{k-1}X \\ &= r_1^{k-1}\xi_1 + \binom{k-1}{1}r_1^{k-2}\xi_2 + \binom{k-1}{2}r^{k-3}\xi_3 + \ldots + \xi_k,\end{aligned}$$

où

$$\xi_k = \frac{d^{k-1}X}{dx^{k-1}}e^{r_1 x} = k(k-1)\ldots 1 . C^{(k-1)}e^{r_1 x};$$

$$\frac{d^k\xi_1}{dx^k} = r_1^k\xi_1 + \binom{k}{1}r_1^{k-1}\xi_2 + \ldots + \binom{k}{k-1}r_1\xi_k,$$

. . . . ,

$$\frac{d^{n-1}\xi_1}{dx^n} = r_1^{n-1}\xi_1 + \binom{n-1}{1}r_1^{n-2}\xi_2 + \ldots + \binom{n-1}{k-1}r_1^{n-k}\xi_k.$$

Les équations (8) seront alors remplacées par les suivantes :

$$\begin{array}{llllllll}
y & = \xi_1 & * & * & \ldots & * & + \xi_{k+1} & + \ldots, \\
y' & = r_1\xi_1 + & \xi_2 & * & \ldots & * & + r_{k+1}\xi_{k+1} & + \ldots, \\
y'' & = r_1^2\xi_1 + & 2r_1\xi_2 + & \xi_3 & \ldots & * & + r_{k+1}^2\xi_{k+1} & + \ldots, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots, \\
y^{(k-1)} & = r_1^{k-1}\xi_1 + & \binom{k-1}{1}r_1^{k-2}\xi_2 + & \binom{k-1}{2}r_1^{k-3}\xi_3 & + \ldots + & \xi_k & + r_{k+1}^{k-1}\xi_{k+1} & + \ldots, \\
y^{(k)} & = r_1^k\xi_1 + & \binom{k}{1}r_1^{k-1}\xi_2 + & \binom{k}{2}r_1^{k-2}\xi_3 & + \ldots + & \binom{k}{k-1}r_1\xi_k & + r_{k+1}^k\xi_{k+1} & + \ldots, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots, \\
y^{(n-1)} & = r_1^{n-1}\xi_1 + & \binom{n-1}{1}r_1^{n-2}\xi_2 + & \binom{n-1}{2}r_1^{n-3}\xi_3 & + \ldots + & \binom{n-1}{k-1}r_1^{n-k}\xi_k & + r_{k+1}^{n-1}\xi_{k+1} & + \ldots.
\end{array}$$

Or, en différentiant successivement $k-1$ fois par rapport à r l'identité [892]

$$\varphi_1(\rho)+r\varphi_2(\rho)+\ldots+r^{n-1}\varphi_n(\rho)=\frac{\varphi(\rho)-\varphi(r)}{\rho-r},$$

et faisant chaque fois $r=r_1$, il vient, à cause de

$$0=\varphi(r_1)=\varphi'(r_1)=\ldots=\varphi^{(k-1)}(r_1),$$

$$\varphi_1(\rho)+r_1\varphi_2(\rho)+\ldots+r_1^{n-2}\varphi_{n-1}(\rho)+r_1^{n-1}\varphi_n(\rho)=\frac{\varphi(\rho)}{\rho-r_1},$$

$$\frac{1}{1}\varphi_2(\rho)+\frac{2}{1}r_1\varphi_3(\rho)+\ldots+\frac{n-2}{1}r_1^{n-3}\varphi_{n-1}(\rho)+\frac{n-1}{1}r_1^{n-2}\varphi_n(\rho)=\frac{\varphi(\rho)}{(\rho-r_1)^2},$$

$$\frac{2.1}{1.2}\varphi_3(\rho)+\ldots+\frac{(n-2)(n-3)}{1.2}r_1^{n-4}\varphi_{n-1}(\rho)$$
$$+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}r_1^{n-3}\varphi_n(\rho)=\frac{\varphi(\rho)}{(\rho-r_1)^3},$$

....,

$$\binom{k-1}{k-1}\varphi_k(\rho)+\binom{k}{k-1}r_1\varphi_{k+1}(\rho)+\ldots+\binom{n-1}{k-1}r_1^{n-k}\varphi_n(\rho)=\frac{\varphi(\rho)}{(\rho-r_1)^k}.$$

Multipliant ces égalités respectivement par $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$, et les ajoutant aux égalités analogues, multipliées par $\xi_{k+1}, \ldots$, il vient, comme au n° 892,

$$\mathrm{F}(\rho)=\varphi(\rho)\left(\frac{\xi_1}{\rho-r_1}+\frac{\xi_2}{(\rho-r_1)^2}+\ldots+\frac{\xi_k}{(\rho-r_1)^k}+\frac{\xi_{k+1}}{\rho-r_{k+1}}+\ldots\right),$$

d'où l'on conclut encore que $\xi_1, \ldots, \xi_k, \xi_{k+1}, \ldots$ sont les numérateurs des fractions simples résultant de la décomposition de la fraction $\dfrac{\mathrm{F}(\rho)}{\varphi(\rho)}$.

897. On peut ramener au cas d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants certaines équations linéaires à coefficients variables, telles que l'équation

$$(9)\quad a_0y+a_1(\alpha+\beta x)y'+a_2(\alpha+\beta x)^2y''+\ldots+a_n(\alpha+\beta x)^n y^{(n)}=0,$$

$\alpha, \beta, a_0, a_1, \ldots, a_n$ étant des constantes. Pour cela, nous remarquerons que, la différentielle de $\alpha+\beta x$ étant constante en même temps que dx, si l'on prend $\alpha+\beta x$ pour nouvelle variable indépendante, en posant

$$\alpha+\beta x=\xi,$$

$d^k y$ sera le même dans les deux systèmes de variables [303], de sorte qu'on aura

$$y^{(k)} = \frac{d^k y}{dx^k} = \beta^k \frac{d^k y}{d\xi^k}.$$

Donc l'équation pourra se ramener à la forme plus simple

(10) $$a_0 y + a_1 x y' + a_2 x^2 y'' + \ldots + a_n x^n y^{(n)} = 0,$$

ou

(11) $$\varphi(x \mathrm{D}_x) y = 0,$$

φ étant le signe d'une fonction rationnelle et entière.

Changeons maintenant de variable indépendante, en posant

$$x = e^t, \quad \text{d'où} \quad dx = e^t\, dt.$$

On en tire [875]

$$\mathrm{D}_x y = e^{-t} \mathrm{D}_t y,$$
$$\mathrm{D}_x^2 y = e^{-t} \mathrm{D}_t (e^{-t} \mathrm{D}_t y) = e^{-t}.e^{-t} (\mathrm{D}_t - 1) \mathrm{D}_t y = e^{-2t} (\mathrm{D}_t - 1) \mathrm{D}_t y,$$
$$\mathrm{D}_x^3 y = e^{-t} \mathrm{D}_t [e^{-2t} (\mathrm{D}_t - 1) \mathrm{D}_t y] = e^{-3t} (\mathrm{D}_t - 2)(\mathrm{D}_t - 1) \mathrm{D}_t y,$$

et en général, en adoptant la notation $r^{\underline{|n}}$ pour désigner la factorielle

$$r^{\underline{|n}} = r(r-1)(r-2)\ldots(r-n+1),$$

on voit aisément que l'on aura

$$\mathrm{D}_x^n y = e^{-nt} \mathrm{D}_t^{\underline{|n}} y,$$

ou

$$x^n \mathrm{D}_x^n y = \mathrm{D}_t^{\underline{|n}} y.$$

Désignons généralement par $\varphi^{\underline{|0}}(r)$ ce que devient la fonction $\varphi(r)$ lorsqu'on y remplace les puissances

$$r, \quad r^2, \quad \ldots, \quad r^n$$

respectivement par les factorielles

$$r^{\underline{|1}} = r, \quad r^{\underline{|2}}, \quad \ldots, \quad r^{\underline{|n}}.$$

L'équation proposée deviendra

(12) $$\varphi^{\underline{|0}}(\mathrm{D}_t) y = 0,$$

ou, en développant les factorielles, et posant $\varphi_1^{\underline{|0}}(r) = \Phi(r)$,

(13) $$\Phi(D_t)y = 0,$$

équation à coefficients constants, comme celles que nous venons de considérer dans les numéros précédents.

Si l'on désigne donc par $r_1, r_2, \ldots, r_n$ les racines de l'équation $\Phi(r) = 0$, supposées inégales, l'intégrale générale de l'équation (13) ou (11) sera

$$y = C_1 e^{r_1 t} + \ldots + C_n e^{r_n t} = C_1 x^{r_1} + C_2 x^{r_2} + \ldots + C_n x^{r_n}.$$

Si r_1 est une racine d'ordre de multiplicité k, on remplacera les k premiers termes de cette expression par

$$(C + C't + \ldots + C^{(k-1)}t^{k-1})e^{r_1 t} = [C + C'\log x + \ldots + C^{(n-1)}(\log x)^{k-1}]x^{r_1}.$$

898. On aurait pu traiter directement l'équation (11), sans changer de variable indépendante, en posant

$$y = x^r z,$$

d'où

$$D_x y = (rx^{r-1} + x^r D_x)z = x^r\left(\frac{r}{x} + D_x\right)z,$$

$$D_x^2 y = (r^{\underline{|2}} x^{r-2} + 2rx^{r-1}D_x + x^r D_x^2)z = x^r\left(\frac{r}{x} + D_x\right)^{\underline{|2}} z,$$

et, en général,

$$D_x^n y = x^r\left(\frac{r}{x} + D_x\right)^{\underline{|n}} z,$$

en désignant par $\left(\frac{r}{x} + D_x\right)^{\underline{|n}}$ ce que devient $\left(\frac{r}{x} + D_x\right)^n$ lorsqu'on y remplace, après le développement, les puissances r^k de r par les factorielles correspondantes $r^{\underline{|k}}$. Par conséquent,

$$x^n D_x^n y = x^r (r + xD_x)^{\underline{|n}} z,$$

la puissance symbolique $(r + xD_x)^{\underline{|n}}$ devant être développée avant que l'on exécute les opérations de différentiation.

L'équation (11) devient, d'après cela,

(14) $$x^r \varphi_1^{\underline{|0}}(r + xD_x)z = 0,$$

et elle se réduit à l'équation $\Phi(r) = 0$, si l'on suppose z constant et l'équation $\Phi(r) = 0$ susceptible d'une racine constante, comme cela a lieu dans le cas des coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_n$ constants.

Dans le cas des racines égales, on différentierait par rapport à r, comme au n° 895, l'identité résultant de la substitution $y = x^r$,

$$\varphi(x\mathrm{D}_x)y = x^r\Phi(r),$$

ce qui donnerait

$$\varphi(x\mathrm{D}_x)\frac{\partial y}{\partial r} = x^r(\log x + \mathrm{D}_r)\Phi(r),$$

$$\varphi(x\mathrm{D}_x)\frac{\partial^2 y}{\partial r^2} = x^r(\log x + \mathrm{D}_r)^2\Phi(r),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Donc, si l'on a

$$0 = \Phi(r_1) = \Phi'(r_1) = \ldots = \Phi^{(k-1)}(r_1),$$

l'équation sera vérifiée par les valeurs que prennent, pour $r = r_1$, la fonction $y = x^r$ et ses $k - 1$ premières dérivées par rapport à r.

899. Considérons encore l'équation (14). Remarquons que l'on peut développer la fonction $\varphi(r + x\mathrm{D}_x)$ par le théorème de Taylor, comme il est facile de le voir par des identités algébriques. On aura ainsi

$$\varphi(r + x\mathrm{D}_x) = \varphi(r) + \frac{\varphi'(r)}{1}x\mathrm{D}_x + \ldots + \frac{\varphi^{(n)}(r)}{n!}x^n\mathrm{D}_x^n \quad (^1).$$

En y changeant les puissances de r en factorielles, et désignant par $\varphi^{\underline{|k}}(r)$ ce que devient $\varphi^{(k)}(r)$ par ce changement, l'équation (14) prendra la forme

$$x^r\left[\varphi^{\underline{|0}}(r) + \frac{\varphi^{\underline{|1}}(r)}{1}x\mathrm{D}_x + \ldots + \frac{\varphi^{\underline{|n}}(r)}{n!}x^n\mathrm{D}_x^n\right]z = 0.$$

Si, pour $r = r_1$, on a à la fois

$$0 = \varphi^{\underline{|0}}(r) = \varphi^{\underline{|1}}(r) = \ldots = \varphi^{\underline{|k-1}}(r),$$

---

(1) On aurait pu se servir, au n° 889, de la formule analogue qui donne le développement de $\varphi(r + \mathrm{D}_x)$, pour obtenir la formule (2) de ce numéro.

alors l'équation sera vérifiée par

$$D_x^k z = 0, \quad \text{d'où} \quad z = C + C'x + \ldots + C^{(k-1)} x^{k-1},$$

et, par suite, la racine r_1 donnera les k intégrales particulières en progression géométrique

$$x^{r_1}, \quad x^{r_1+1}, \quad \ldots, \quad x^{r_1+k-1}.$$

On aura en même temps l'équation en $z^{(k)}$ d'ordre $n-k$, à laquelle s'abaisse l'équation proposée,

$$(15) \quad \left[\frac{\varphi^{|k}(r_1)}{k!} + \frac{\varphi^{|k+1}(r_1)}{(k+1)!} x D_x + \ldots + \frac{\varphi^{|n}(r)}{n!} x^{n-k} D_x^{n-k}\right] z^{(k)} = 0,$$

laquelle est toujours de même forme que la proposée.

900. *Exemples.* — I. Soit l'équation

$$-210y + 90xy' - 15x^2y'' + x^3y''' = 0.$$

On aura

$$\varphi^{|0}(r) = -210 + 90r - 15r^{|2} + r^{|3} = -210 + 107r - 18r^2 + r^3,$$

$$\varphi^{|1}(r) = 90 - 30r + 3r^{|2} = 90 - 33r + 3r^2,$$

$$\frac{1}{1.2}\varphi^{|2}(r) = -15 + 3r,$$

$$\frac{1}{1.2.3}\varphi^{|3}(r) = 1.$$

L'équation $\varphi^{|0}(r) = 0$ admet la racine $r = 5$, qui annule aussi $\varphi^{|1}(r)$ et $\varphi^{|2}(r)$. L'équation (14) se réduit donc à

$$D_x^3 z = 0, \quad \text{d'où} \quad z = C + C'x + C''x^2,$$

et, par suite, l'intégrale générale de la proposée est

$$y = Cx^5 + C'x^6 + C''x^7.$$

Si l'on avait pris, parmi les racines de $\varphi^{|0}(r) = 0$, la racine $r = 6$, qui annule aussi $\varphi^{|1}(r)$, l'équation (15) serait devenue

$$(3 + xD_x) z'' = 0,$$

d'où

$$x^3 z'' = \text{const.},$$

et par suite

$$z = Cx^{-1} + C' + C''x,$$

ce qui aurait encore donné la même valeur de y.

II. Soit encore l'équation

$$2(1-x)y + (x^2-2)y' + x(2-x)y'' = 0,$$

que l'on peut écrire sous la forme

$$2(1-x).y + \frac{x^2-2}{x}.xy' + \frac{2-x}{x}.x^2y'' = 0.$$

On a ici

$$\varphi^{\underline{|0}}(r) = 2(1-x) + \frac{x^2-2}{x}r + \frac{2-x}{x}r^{\underline{|2}}$$

$$= \frac{1}{x}[2x(1-x) - (4+x-x^2)r + (2-x)r^2];$$

l'équation $\varphi^{\underline{|0}}(r) = 0$ admettant la racine constante $r = 2$, nous poserons $y = x^2 z$. On a maintenant

$$\varphi^{\underline{|1}}(r) = \frac{x^2-2}{x} + \frac{2(2-x)}{x}r, \quad \frac{1}{1.2}\varphi^{\underline{|2}}(r) = \frac{2-x}{x},$$

d'où l'équation transformée

$$0 = x^2\left[\frac{6-4x+x^2}{x}.xD_x + \frac{2-x}{x}.x^2D_x^2\right]z,$$

ou

$$\frac{dz'}{z'} + \frac{6-4x+x^2}{2x-x^2}dx = 0,$$

laquelle donne

$$z = C\frac{e^x}{x^2} + C',$$

et par suite

$$y = Ce^x + C'x^2$$

§ III.

PASSAGE DES ÉQUATIONS LINÉAIRES SANS SECOND MEMBRE AUX ÉQUATIONS LINÉAIRES COMPLÈTES.

901. Nous avons démontré [884] que l'intégrale générale d'une équation différentielle linéaire complète

$$(1) \qquad \varphi(D_x)y = X$$

s'obtient en ajoutant à l'intégrale générale $y^{(0)}$ de l'équation homogène

$$(2) \qquad \varphi(D_x)y^{(0)} = 0$$

une intégrale particulière quelconque Y de l'équation (1). Il s'agit de trouver les moyens d'obtenir cette intégrale particulière.

Remarquons d'abord que, si le second membre X se décompose en plusieurs parties, de sorte que l'on ait $X = X_1 + X_2 + \ldots$, on obtiendra une intégrale particulière de l'équation (1) en faisant la somme $Y = Y_1 + Y_2 + \ldots$ des intégrales particulières Y_1, Y_2, ... des équations

$$\varphi(D_x)Y_1 = X_1, \quad \varphi(D_x)Y_2 = X_2, \quad \ldots.$$

On pourra ainsi, dans plusieurs cas, simplifier le problème par la décomposition du second membre en plusieurs termes.

Examinons d'abord plusieurs cas particuliers importants, dans lesquels la détermination de l'intégrale particulière peut se faire par des moyens plus simples que les méthodes générales.

902. Supposons que l'équation proposée soit à coefficients constants, et que le second membre X contienne un terme de la forme $\alpha e^{\lambda x}$, α et λ étant des constantes. En posant $y = ze^{rx}$, l'équation à laquelle il s'agit de satisfaire sera

$$\varphi(D_x)(ze^{rx}) = e^{rx}\left[\varphi(r) + \frac{\varphi'(r)}{1} D_x + \ldots + \frac{\varphi^{(n)}(r)}{n!} D_x^n\right] z = \alpha e^{\lambda x}.$$

Si $\varphi(\lambda)$ n'est pas nul, il est clair que cette équation sera vérifiée en posant

$$D_x z = 0, \quad r = \lambda, \quad \text{et} \quad \varphi(\lambda).z = \alpha.$$

Donc on aura l'intégrale particulière

$$Y = \frac{\alpha}{\varphi(\lambda)} e^{\lambda x}.$$

Mais, si λ est une racine k-uple de l'équation $\varphi(r) = 0$, c'est-à-dire si le second membre est une intégrale particulière d'ordre k de l'équation (2), alors, $\varphi(\lambda)$, $\varphi'(\lambda)$, ... $\varphi^{(k-1)}(\lambda)$ étant nuls, on pourra supposer $D_x^k z$ constant, avec $r = \lambda$, d'où

$$\frac{\varphi^{(k)}(\lambda)}{k!} D_x^k z = \alpha.$$

En intégrant k fois, et supprimant les constantes arbitraires qui se retrouvent dans l'expression de l'intégrale générale $y^{(0)}$, on aura

$$\varphi^{(k)}(\lambda) z = \alpha x^k,$$

d'où

$$Y = \frac{\alpha x^k}{\varphi^{(k)}(\lambda)} e^{\lambda x}.$$

903. Si le second membre est de la forme $\alpha \begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix}(\beta x + \gamma)$, on le décomposera en termes de la forme $be^{\pm\beta x i}$, et l'on sera ramené au cas précédent.

Ou encore, ce qui revient au même, on fera, dans l'équation (1),

$$Y = p\cos(\beta x + \gamma) + q\sin(\beta x + \gamma),$$

et l'on calculera les coefficients indéterminés p et q en identifiant les deux membres. Remarquons que, si le second membre se compose d'un seul terme, $\alpha\cos(\beta x + \gamma)$ par exemple, et que tous les termes du polynôme $\varphi(D_x)$ soient de même parité, on pourra poser simplement $y = p\cos(\beta x + \gamma)$ si ces termes sont d'ordre pair, et $y = q\sin(\beta x + \gamma)$ s'ils sont d'ordre impair.

Si $\pm\beta i$ était racine de l'équation $\varphi(r) = 0$, de l'ordre de multiplicité k, on remplacerait p et q par px^k, qx^k. Ainsi, si l'on donne l'équation

$$y + 2y'' + y^{\text{IV}} = \cos x,$$

on posera $y = px^2\cos x$, et l'on trouvera

$$p = -\frac{1}{8}, \quad \text{d'où} \quad Y = -\frac{1}{8}x^2\cos x.$$

904. De même, étant donnée l'équation

$$\varphi(x\mathrm{D}_x)y = \mathrm{X},$$

si X est composé de termes de la forme αx^λ, on posera $y = zx^r$, d'où

$$x^r\left[\varphi^{\underline{|0}}(r) + \frac{\varphi^{\underline{|1}}(r)}{1}x\mathrm{D}_x + \ldots\right]z = \alpha x^\lambda;$$

si $\varphi^{\underline{|0}}(\lambda)$ n'est pas nul, on prendra $r = \lambda$, z constant, d'où

$$z = \frac{\alpha}{\varphi^{\underline{|0}}(\lambda)}, \quad \mathrm{Y} = \frac{\alpha}{\varphi^{\underline{|0}}(\lambda)}x^\lambda.$$

Si $\varphi^{\underline{|0}}(\lambda)$ est nul, en faisant $\varphi^{\underline{|0}}(r) = \Phi(r)$ et $x = e^t$, l'équation deviendra

$$e^{rt}\left[\Phi(r) + \frac{\Phi'(r)}{1}\mathrm{D}_t\, t + \ldots\right]z = \alpha e^{\lambda t},$$

et, si λ est racine k-uple de $\Phi(r) = 0$, on trouvera, comme précédemment,

$$z = \frac{\alpha t^k}{\Phi^{(k)}(\lambda)}, \quad \text{d'où} \quad \mathrm{Y} = \frac{\alpha}{\Phi^{(k)}(\lambda)}(\log x)^k x^\lambda.$$

905. Si le second membre est un polynôme en x à exposants entiers, et que l'équation ait pour coefficients des fonctions entières de x, on substituera à y un polynôme à coefficients indéterminés et de degré assez élevé pour que le nombre des coefficients suffise à l'identification des deux membres.

Ainsi, si les coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont constants, et $a_0 \gtrless 0$, X étant de la forme

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_\lambda x^\lambda,$$

on posera

$$\mathrm{Y} = \mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_1 x + \ldots + \mathrm{A}_\lambda x^\lambda,$$

d'où

$$\varphi(\mathrm{D}_x)\mathrm{Y} = \sum_0^n{}_p\, a_p\, p^{\underline{|p}}\mathrm{A}_p + x\sum_0^n{}_p\,(p+1)^{\underline{|p}}a_p\,\mathrm{A}_{p+1} + \ldots$$
$$+ x^\lambda\sum_0^n{}_p\,(p+\lambda)^{\underline{|p}}a_p\,\mathrm{A}_{p+1},$$

ce qui donne, en identifiant avec le second membre, et remarquant

que $A_p = 0$ pour $p > \lambda$,

$$\begin{aligned}
\alpha_\lambda &= a_0 A_\lambda,\\
\alpha_{\lambda-1} &= a_0 A_{\lambda-1} + \lambda^{\underline{|1}} a_1 A_\lambda,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\alpha_0 &= a_0 A_0 + \lambda^{\underline{|1}} a_1 A_1 + \ldots + \lambda^{\underline{|\lambda}} a_\lambda A_\lambda,
\end{aligned}$$

d'où l'on tire successivement $A_\lambda, A_{\lambda-1}, \ldots, A_0$.

Si les k premiers coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ sont nuls, on prendra pour Y un polynôme de degré $\lambda + k$, et l'on trouvera les équations

$$\begin{aligned}
\alpha_\lambda &= (\lambda + k)^{\underline{|k}} a_k A_{\lambda+k},\\
\alpha_{\lambda-1} &= (\lambda + k - 1)^{\underline{|k}} a_k A_{\lambda+k-1} + (\lambda + k)^{\underline{|k+1}} A_{\lambda+k},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\alpha_0 &= \lambda^{\underline{|k}} a_k A_k + (\lambda + 1)^{\underline{|k+1}} a_{k+1} A_{k+1} + \ldots + (\lambda + k)^{\underline{|\lambda+k}} a_{\lambda+k} A_{\lambda+k},
\end{aligned}$$

les coefficients $A_0, \ldots, A_{k-1}$ pouvant être pris à volonté, par exemple égaux à zéro.

Si X contient des exposants non entiers, par exemple s'il y a un terme de la forme αx^λ, λ étant fractionnaire ou incommensurable, on posera $y = x^\lambda \times$ un polynôme entier, et l'on opérera comme précédemment.

906. On peut ainsi, dans certains cas, trouver une intégrale particulière de l'équation (1), lors même qu'on ne saurait pas trouver l'intégrale générale de l'équation (2). Soit, par exemple, l'équation

$$2y + (5 + x)y' + xy'' = 1 + x^2.$$

En posant $y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots$, et substituant cette valeur dans l'équation, on trouve, par l'identification des termes affectés des mêmes puissances de x dans les deux membres, les équations de condition

$$2A_0 + 5A_1 = 1, \quad 3A_1 + 12A_2 = 0, \quad 4A_2 = 1,$$

les coefficients $A_3, A_4, \ldots$ étant nuls. On en tire

$$A_0 = 3, \quad A_1 = -1, \quad A_2 = \frac{1}{4}, \quad \text{d'où} \quad Y = 3 - x + \frac{1}{4}x^2.$$

907. Dans les cas où ces méthodes particulières ne sont pas applicables, on a recours à des méthodes générales, au moyen desquelles on peut, par de simples quadratures, déduire de l'intégrale générale de l'équation privée de second membre une intégrale particulière de l'équation complète.

I. *Méthode de d'Alembert.* — Nous avons vu [881] que, étant donnée l'équation

$$\varphi(D_x)y = X, \tag{1}$$

on peut, au moyen de k intégrales particulières de l'équation

$$\varphi(D_x)y = 0, \tag{2}$$

abaisser l'ordre de l'équation (1) de k unités. Si l'on connaît l'intégrale générale de l'équation (2), c'est-à-dire si l'on connaît les n intégrales particulières distinctes qui la composent, on pourra donc abaisser l'équation (1) au degré zéro, c'est-à-dire l'intégrer complétement.

Il suffira même de connaître $n - 1$ intégrales particulières distinctes de l'équation (1); car on pourra alors abaisser son ordre à l'unité et la ramener à une équation de la forme

$$(h_0 + h_1 D_x) w = X,$$

équation linéaire du premier ordre que nous savons intégrer [821].

Exemple. — Soit l'équation

$$a^2 y + y'' = X.$$

L'équation sans second membre correspondante sera

$$a^2 y + y'' = 0,$$

laquelle admet pour intégrales particulières [893]

$$y_1 = \cos ax, \quad y_2 = \sin ax.$$

Posons [883]

$$y = \cos ax . \int s\,dx,$$

d'où

$$y' = -a \sin ax . \int s\,dx + \cos ax . s,$$

$$y'' = -a^2 \cos ax . \int s\,dx - 2a \sin ax . s + \cos ax . s'.$$

L'équation deviendra

$$-2a\sin ax.s+\cos ax.s'=X.$$

De l'intégrale particulière y_2 on peut maintenant tirer une intégrale particulière de l'équation sans second membre

$$-2a\sin ax.s+\cos ax.s'=0,$$

savoir

$$s_1=D_x\frac{y_2}{y_1}=D_x\operatorname{tang} ax=\frac{a}{\cos^2 ax}\cdot$$

On posera alors

$$s=\frac{a}{\cos^2 ax}\int t\,dx,\quad \text{d'où}\quad s'=\ldots+\frac{a}{\cos^2 ax}\cdot t,$$

$$\frac{a}{\cos^2 ax}t=X,\quad t=\frac{1}{a}X\cos ax,$$

$$s=\frac{1}{\cos^2 ax}\int X\cos ax\,dx,$$

$$y=\cos ax\int\frac{dx}{\cos^2 ax}\int X\cos ax\,dx$$

$$=\cos ax\left(\frac{\operatorname{tang} ax}{a}\int X\cos ax\,dx-\frac{1}{a}\int\sin ax.X\,dx\right)$$

$$=C_1\sin ax+C_2\cos ax+\frac{1}{a}\left(\sin ax\int X\cos ax\,dx-\cos ax\int X\sin ax\,dx\right).$$

908. II. *Méthode de Lagrange, ou méthode de la variation des constantes arbitraires.* — Représentons par

$$(3)\qquad \eta=\Sigma C_i\eta_i,\quad (i=1,2,\ldots,n)$$

l'intégrale générale de l'équation (2), et proposons-nous de représenter l'intégrale générale de l'équation (1) par une expression de même forme, en y remplaçant seulement les constantes C_i par des fonctions u_i de x, convenablement choisies. L'expression ainsi obtenue,

$$(4)\qquad y=\Sigma u_i\eta_i,$$

renferme n fonctions indéterminées $u_1, u_2, \ldots, u_n$, assujetties à la seule condition que cette expression (4) satisfasse à l'équation (1). On pourra donc soumettre ces n fonctions à $n-1$ autres conditions arbitraires, qu'il conviendra de choisir de manière à

simplifier autant que possible les calculs. Pour cela, on fera en sorte que non-seulement y, mais encore ses $n-1$ premières dérivées soient de même forme que si $u_1, \ldots, u_n$ étaient des constantes. Les $n-1$ conditions en question s'obtiendront alors en égalant à zéro les parties des dérivées $y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$ qui proviendraient de la variation de $u_1, u_2, \ldots, u_n$. On aura, de cette manière, les deux systèmes d'équations

$$(5)\quad \begin{cases} y = \sum u_i z_i, \\ y' = \sum u_i z_i', \\ y'' = \sum u_i z_i'', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^{(n-1)} = \sum u_i z_i^{(n-1)}, \\ y^{(n)} = \sum u_i z_i^{(n)} + \sum u_i' z_i^{(n-1)}, \end{cases}$$

$$(6)\quad \begin{cases} 0 = \sum u_i' z_i, \\ 0 = \sum u_i' z_i', \\ \ldots\ldots\ldots \\ 0 = \sum u_i' z_i^{(n-2)}. \end{cases}$$

En substituant les valeurs (5) dans l'équation (1), et ayant égard à ce que les z_i satisfont à l'équation (2), il vient

$$(7)\quad \sum u_i' z_i^{(n-1)} = X,$$

et cette dernière équation, jointe aux équations (6), déterminera pour $u_1', u_2', \ldots, u_n'$ des valeurs finies, puisque le déterminant

$$R = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 & \ldots & z_n \\ z_1' & z_2' & \ldots & z_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ z_1^{(n-1)} & z_2^{(n-1)} & \ldots & z_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

de ces équations n'est pas nul, la valeur (3) étant supposée l'intégrale générale de l'équation (2) [878].

Si l'on désigne par R_i le déterminant mineur $\dfrac{\partial R}{\partial z_i^{(n-1)}}$, les équations (6) et (7) donneront

$$R u_i' = R_i X, \quad \text{d'où} \quad u_i = C_i + \int \frac{R_i}{R} X\,dx, \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Donc l'intégrale générale de l'équation (1) sera

$$(8) \qquad y = \sum C_i z_i + \sum z_i \int \frac{R_i}{R} X\, dx,$$

et l'on reconnaît immédiatement qu'elle est de la forme (3) du n° 884.

Exemples. — I. Nous avons déjà vu [822] l'application de cette méthode au cas particulier de l'équation linéaire du premier ordre.

II. Prenons le cas de l'équation à coefficients constants; en nous reportant aux notations précédentes, on voit que, si l'équation en r a ses racines inégales, le système des équations (6) et (7) ne sera autre chose que ce que deviennent les équations (8) du n° 891 lorsqu'on y remplace respectivement

$$\xi_1, \quad \xi_2, \dots, \quad \xi_n, \quad y, y', \dots, y^{(n-1)}$$

par

$$e^{r_1 x} u'_1, \; e^{r_2 x} u'_2, \dots, e^{r_n x} u'_n, \; 0, 0, \dots, X.$$

On aura alors

$$F(\rho) = X, \quad \text{d'où} \quad e^{r_i x} u'_i = \frac{X}{\varphi'(r_i)}.$$

L'intégrale générale de l'équation (1) sera donc

$$y = \sum C_i e^{r_i x} + \sum \frac{e^{r_i x}}{\varphi'(r_i)} \int e^{-r_i x} X\, dx.$$

S'il y a une racine double, $r_1 = r_2$, soient a_1, a'_1 les numérateurs des fractions simples provenant de la décomposition de $\frac{1}{\varphi(\rho)}$ et ayant pour dénominateurs $\rho - r_1$ et $(\rho - r_1)^2$. On trouvera, comme au n° 896,

$$(u'_1 + u'_2 x) e^{r_1 x} = a_1 X, \quad u'_2 e^{r_1 x} = a'_1 X,$$

d'où

$$u'_2 = a'_1 e^{-r_1 x} X, \quad u'_1 = (a_1 - a'_1 x) e^{-r_1 x} X.$$

On verra de même, quel que soit le degré de multiplicité des racines, que le calcul se ramènera toujours à la décomposition de $\frac{1}{\varphi(\rho)}$ en fractions simples.

909. Si l'on connaît seulement k intégrales particulières η_1, $\eta_2, \ldots, \eta_k$ de l'équation (2), posons alors

$$y = \sum u_i \eta_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

On a ici k fonctions inconnues, devant satisfaire à une seule condition donnée, l'équation (1), et entre lesquelles on pourra, par conséquent, établir $k-1$ relations arbitraires, que l'on choisira comme ci-dessus, en exprimant que les $k-1$ premières dérivées de y conservent la même forme que si $u_1, u_2, \ldots, u_k$ étaient des constantes. On aura ainsi

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} y &= \sum u_i \eta_i, \\ y' &= \sum u_i \eta_i', \\ y'' &= \sum u_i \eta_i'', \\ &\ldots\ldots\ldots, \\ y^{(k-1)} &= \sum u_i \eta_i^{(k-1)}, \\ y^{(k)} &= \sum u_i \eta_i^{(k)} + \sum u_i' \eta_i^{(k-1)}, \\ y^{(k+1)} &= \sum u_i \eta_i^{(k+1)} + 2\sum u_i' \eta_i^{(k)} + \sum u_i'' \eta_i^{(k-1)}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y^{(n)} &= \sum u_i \eta_i^{(n)} + (n-k+1)_1 \sum u_i' \eta_i^{(n-1)} + \ldots + \sum u_i^{(n-k+1)} \eta_i^{(k-1)}, \end{aligned}\right.$$

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} 0 &= \sum u_i' \eta_i, \\ 0 &= \sum u_i' \eta_i', \\ &\ldots\ldots\ldots, \\ 0 &= \sum u_i' \eta_i^{(k-2)}. \end{aligned}\right.$$

En substituant les valeurs (9) dans l'équation (1), et ayant égard à l'équation (2), à laquelle satisfont les η_i, il vient

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum \left[a_k \eta_i^{(k-1)} + 2a_{k+1} \eta_i^{(k)} + \ldots + (n-k+1)_1 a_n \eta_i^{(n-1)}\right] u_i' \\ &\quad + \sum \left[a_{k+1} \eta_i^{(k-1)} + \ldots + (n-k+1)_2 a_n \eta_i^{(n-2)}\right] u_i'' + \ldots \\ &\qquad + a_n \sum u_i^{(n-k+1)} \eta_i^{(k-1)} = X. \end{aligned}\right.$$

Si l'on fait maintenant

$$R = \begin{vmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \ldots & \eta_k \\ \eta_1' & \eta_2' & \ldots & \eta_k' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \eta_1^{(k-1)} & \eta_2^{(k-1)} & \ldots & \eta_k^{(k-1)} \\ \rho_1 & \rho_2 & \ldots & \rho_k \end{vmatrix}, \quad R_i = \frac{\partial R}{\partial \rho_i},$$

la résolution des équations (10) donnera

$$\frac{u'_1}{R_1} = \frac{u'_2}{R_2} = \ldots = \frac{u'_k}{R_k} = v,$$

v désignant la valeur commune inconnue de ces rapports égaux. Substituant les valeurs $R_i v$ des quantités u'_i dans l'équation (11), cette équation se changera en une équation linéaire en v d'ordre $n-k$ et de même type que l'équation (1). Si l'on intègre complètement cette équation, on aura alors

$$u_1 = \int R_1 v\, dx, \quad \ldots, \quad u_k = \int R_k v\, dx,$$

d'où

$$y = \eta_1 \int R_1 v\, dx + \ldots + \eta_k \int R_k v\, dx.$$

910. III. *Méthode de Cauchy*. — Déterminons les constantes arbitraires $C_1, C_2, \ldots, C_n$ que renferme l'intégrale générale η de l'équation sans second membre (2), de manière que, pour $x = \alpha$, on ait les équations

(12) $$\eta = 0, \quad \eta' = 0, \quad \ldots, \quad \eta^{(n-2)} = 0, \quad \eta^{(n-1)} = f(\alpha),$$

$f(\alpha)$ étant ce que devient $X = f(x)$ lorsqu'on y remplace x par une variable α, indépendante de x. On obtiendra ainsi pour $C_1, \ldots, C_n$ des valeurs en fonction de α, et l'on peut remarquer que, les équations (12) ne différant du système des équations (6) et (7) que par le changement de x en α, les valeurs de $C_1, \ldots, C_n$ seront les mêmes que celles que l'on a obtenues pour $u'_1, \ldots, u'_n$, dans le n° 908, au changement près de x en α.

Substituant pour $C_1, \ldots, C_n$ ces valeurs dans l'expression de l'intégrale générale η, on obtiendra une intégrale particulière η_α de l'équation (2), laquelle intégrale sera une fonction des deux variables indépendantes x et α. Cela posé, je dis que

(13) $$Y = \int_0^x \eta_\alpha\, d\alpha$$

sera une intégrale particulière de l'équation (1).

En effet, par la règle de la différentiation sous le signe $\int$ [470], on a

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = \int_0^x \frac{\partial \eta_\alpha}{\partial x}\, d\alpha + (\eta_\alpha)_{\alpha=x},$$

$(\eta_\alpha)_{\alpha=x}$ désignant ce que devient η_α lorsqu'on y fait $\alpha = x$. Or cette valeur est nulle, d'après la première des équations (12), qui exprime que η_α est nul pour $x = \alpha$, quel que soit α, et par suite aussi lorsque, après avoir fait $x = \alpha$, on y remplace partout α par x. Donc

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = \int_0^x \frac{\partial \eta_\alpha}{\partial x}\, d\alpha.$$

On trouverait de même, en vertu des autres conditions (12),

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} = \int_0^x \frac{\partial^2 \eta_\alpha}{\partial x^2}\, d\alpha, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{n-1} Y}{\partial x^{n-1}} = \int_0^x \frac{\partial^{n-1} \eta_\alpha}{\partial x^{n-1}}\, d\alpha,$$

$$\frac{\partial^n Y}{\partial x^n} = \int_0^x \frac{\partial^n \eta_\alpha}{\partial x^n}\, d\alpha + f(x).$$

En substituant dans le premier membre de l'équation (1) ces valeurs de Y et de ses dérivées, on trouve

$$\int_0^x \left(a_0 \eta_\alpha + a_1 \frac{\partial \eta_\alpha}{\partial x} + \ldots + a_n \frac{\partial^n \eta_\alpha}{\partial x^n} \right) d\alpha + f(x).$$

Or la quantité entre parenthèses s'évanouit identiquement, puisque η_α est une intégrale particulière de l'équation (2). Donc ce premier membre se réduit à $f(x)$, et, par suite, la valeur (13) satisfait à l'équation (1), dont l'intégrale générale sera alors

$$y = \eta + Y.$$

911. Appliquons cette méthode à l'équation à coefficients constants, dans le cas des racines inégales. On peut mettre son intégrale générale sous la forme

$$\eta = C_1 e^{r_1(x-\alpha)} + \ldots + C_n e^{r_n(x-\alpha)},$$

et alors les équations (19) deviendront

$$\begin{aligned}
C_1 + \ldots + \quad C_n &= 0,\\
r_1 C_1 + \ldots + r_n \quad C_n &= 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &\ldots,\\
r_1^{n-2} C_1 + \ldots + r_n^{n-2} C_n &= 0,\\
r_1^{n-1} C_1 + \ldots + r_n^{n-1} C_n &= f(\alpha),
\end{aligned}$$

d'où l'on tirera, comme ci-dessus,

$$C_i = \frac{f(\alpha)}{\varphi'(r_i)}.$$

Donc

$$z_\alpha = \sum \frac{f(\alpha)}{\varphi'(r_i)} e^{r_i(x-\alpha)},$$

et, par suite,

$$Y = \sum \frac{e^{r_i x}}{\varphi'(r_i)} \int_0^x e^{-r_i \alpha} f(\alpha)\, d\alpha,$$

ou, ce qui revient au même,

$$Y = \sum \frac{e^{r_i x}}{\varphi'(r_i)} \int_0^x e^{-r_i x} X\, dx,$$

ce qui donne la même valeur de y qu'au n° 908.

En général, il est aisé de voir que la méthode de Cauchy ne diffère de celle de Lagrange que par l'exposition, et qu'elle conduit aux mêmes calculs.

Considérons, par exemple, l'équation

$$a^2 y + y'' = X = f(x).$$

L'intégrale générale de l'équation sans second membre correspondante peut s'écrire ainsi :

$$z = C_1 \cos a(x-\alpha) + C_2 \sin a(x-\alpha).$$

Les équations (12) deviennent donc

$$C_1 = 0, \quad aC_2 = f(\alpha),$$

d'où

$$z_\alpha = \frac{f(\alpha)}{a} \sin a(x-\alpha),$$

et, par suite,

$$Y = \frac{1}{a} \int_0^x f(\alpha) \sin a(x-\alpha)\, d\alpha,$$

ou, en développant,

$$Y = -\frac{\cos ax}{a} \int_0^x X \sin ax\, dx + \frac{\sin ax}{a} \int_0^x X \cos ax\, dx,$$

comme au n° 907.

Si l'on suppose, en particulier, $X = \sin(gx + h)$, on aura

$$Y = \frac{1}{a}\int_0^x \sin(g\alpha + h)\sin a(x - \alpha)\,d\alpha$$
$$= \frac{1}{2a}\int_0^x \{\cos[(g + a)\alpha + h - ax] - \cos[(g - a)\alpha + h + ax]\}\,d\alpha$$
$$= \frac{1}{2a}\left[\frac{\sin(gx + h) + \sin(ax - h)}{a + g} + \frac{\sin(gx + h) - \sin(ax + h)}{a - g}\right]$$
$$= \frac{1}{a^2 - g^2}\sin(gx + h) - \frac{g\cos h}{a(a^2 - g^2)}\sin ax - \frac{\sin h}{a^2 - g^2}\cos ax.$$

On peut faire abstraction des deux derniers termes, qui se réunissent aux termes semblables de l'intégrale générale de l'équation sans second membre, $z = C_1 \sin ax + C_2 \cos ax$, et prendre simplement

$$Y = \frac{1}{a^2 - g^2}\sin(gx + h).$$

Dans le cas de $g = a$, il viendrait

$$Y = \frac{1}{2a}\int_0^x [\cos(2a\alpha + h - ax) - \cos(h + ax)]\,d\alpha$$
$$= \frac{1}{2a}\left[\frac{\sin(ax + h) + \sin(ax - h)}{2a} - x\cos(h + ax)\right],$$

ou, en négligeant les termes qui rentrent dans ceux de z,

$$Y = -\frac{x}{2a}\cos(ax + h).$$

§ IV.

INTÉGRATION DE CERTAINES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES AU MOYEN DES INTÉGRALES DÉFINIES.

912. Nous allons indiquer, dans ce paragraphe, l'application à quelques équations importantes de la méthode d'intégration due à Laplace et fondée sur l'expression des fonctions sous forme d'intégrales définies [1].

---

(1) *Voir* le travail récemment publié par M. S. Spitzer : *Vorlesungen über lineare Differential-Gleichungen*. Vienne, 1878.

Nous nous occuperons principalement de l'équation linéaire du second ordre

$$(1) \qquad (a_0 + b_0 x) y + (a_1 + b_1 x) y' + (a_2 + b_2 x) y'' = 0,$$

$a_0, b_0, a_1, b_1, a_2, b_2$ étant des constantes.

La méthode de Laplace consiste à chercher à vérifier cette équation par une expression de la forme

$$(2) \qquad y = \int_{u_1}^{u_2} e^{ux} U\, du,$$

U désignant une fonction de u encore indéterminée, ainsi que les limites constantes u_1, u_2 de l'intégration.

Si l'on substitue la valeur (2) dans l'équation (1), et que l'on pose, pour abréger,

$$P = a_0 + a_1 u + a_2 u^2,$$
$$Q = b_0 + b_1 u + b_2 u^2,$$

l'équation deviendra [470]

$$(3) \qquad \int_{u_1}^{u_2} (P + Qx) e^{ux} U\, du = 0.$$

En intégrant par parties le second terme de cette équation, elle prendra la forme

$$[QUe^{ux}]_{u_1}^{u_2} + \int e^{ux} [PU - D_u(QU)] du = 0,$$

et cette égalité devra être identiquement vérifiée. Il suffira, pour cela, que la fonction U satisfasse à l'équation

$$(4) \qquad PU\, du - d(QU) = 0,$$

et qu'en même temps les deux constantes u_1, u_2 soient choisies de manière que, substituées à u, elles vérifient l'équation

$$(5) \qquad QU e^{ux} = 0.$$

L'équation (4) donne

$$(6) \qquad U = \frac{1}{Q} e^{\int \frac{P}{Q} du},$$

ce qui changera l'équation (5) en

$$(7)\qquad e^{ux+\int \frac{P}{Q}du} = 0,$$

et, en résolvant celle-ci par rapport à u, si l'on trouve deux valeurs indépendantes de x, on les prendra pour u_1, u_2. On aura alors

$$(8)\qquad y = \int_{u_2}^{u_2} \frac{1}{Q} e^{ux+\int \frac{P}{Q}du}\, du.$$

913. Pour pousser plus loin les calculs, il faut d'abord obtenir l'intégrale $\int \frac{P}{Q}\, du$. Or, suivant la nature de son dénominateur, la fraction

$$\frac{P}{Q} = \frac{a_0 + a_1 u + a_2 u^2}{b_0 + b_1 u + b_2 u^2}$$

pourra se mettre sous l'une des quatre formes suivantes :

$$(I)\qquad \frac{P}{Q} = m + \frac{A}{u-\alpha} + \frac{B}{u-\beta},$$

$$(II)\qquad \frac{P}{Q} = m + \frac{A}{(u-\alpha)^2} + \frac{B}{u-\alpha},$$

$$(III)\qquad \frac{P}{Q} = m + nu + \frac{A}{u-\alpha},$$

$$(IV)\qquad \frac{P}{Q} = a_0 + a_1 u + a_2 u^2,$$

la première ayant lieu si $Q = 0$ a ses racines inégales, la deuxième si $Q = 0$ a ses deux racines égales, la troisième si $b_2 = 0$, la quatrième si Q est constant.

914. I. Considérons le premier cas. En introduisant au lieu de a_0, a_1, a_2, ... les nouvelles constantes m, A, B, α, β, l'équation (1) deviendra

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} &[-A\beta - B\alpha + \alpha\beta(m+x)]y \\ &\quad + [A + B - (\alpha+\beta)(m+x)]y' + (m+x)y'' = 0. \end{aligned}\right.$$

On trouve d'abord

$$\int \frac{P}{Q}\, du = mu + A\log(u-\alpha) + B\log(u-\beta)$$

D'ailleurs, à cause de

$$Q = h_2(u-\alpha)(u-\beta),$$

l'équation (6) donnera, en négligeant le facteur constant h_2 [877, I],

$$U = e^{mu}(u-\alpha)^{A-1}(u-\beta)^{B-1},$$

et l'équation (7) deviendra

$$(10) \qquad e^{u(m+x)}(u-\alpha)^{A}(u-\beta)^{B} = 0.$$

Si maintenant A et B sont des nombres réels positifs ou des nombres complexes à partie réelle positive, c'est-à-dire de la forme $p^2 \pm iq^2$, on pourra prendre

$$u_1 = \alpha, \quad u_2 = \beta,$$

d'où

$$(11) \qquad y = \int_\alpha^\beta e^{u(m+x)}(u-\alpha)^{A-1}(u-\beta)^{B-1}\,du.$$

On peut développer aisément cette expression en série, en s'appuyant sur la formule (6) du n° 487, et, si l'on pose, pour abréger,

$$(\beta-\alpha)(m+x) = \xi, \quad A+B = K,$$

on obtiendra la série suivante, convergente pour toute valeur de x :

$$y = e^{\alpha(m+x)}\left[1 + \frac{A}{K}\xi + \frac{A(A+1)}{K(K+1)}\frac{\xi^2}{2!} + \frac{A(A+1)(A+2)}{K(K+1)(K+2)}\frac{\xi^3}{3!} + \dots\right].$$

915. Si A et B sont des nombres *réels, entiers et positifs*, on pourra obtenir dans ce cas l'intégrale sous forme finie. En effet, X étant indépendant de u, on trouve, à l'aide de l'intégration par parties,

$$\int e^{uX}\varphi(u)\,du = e^{uX}\left[\frac{\varphi(u)}{X} - \frac{\varphi'(u)}{X^2} + \frac{\varphi''(u)}{X^3} - \dots\right],$$

expression qui aura un nombre fini de termes si $\varphi(u)$ est une fonction rationnelle et entière. Si donc on fait

$$X = m+x, \quad \varphi(u) = (u-\alpha)^{A-1}(u-\beta)^{B-1},$$

$$(12) \qquad \begin{cases} y_1 = e^{\alpha(m+x)}\left[\dfrac{\varphi(\alpha)}{m+x} - \dfrac{\varphi'(\alpha)}{(m+x)^2} + \dots\right], \\[2ex] y_2 = e^{\beta(m+x)}\left[\dfrac{\varphi(\beta)}{m+x} - \dfrac{\varphi'(\beta)}{(m+x)^2} + \dots\right], \end{cases}$$

la valeur (11) de y deviendra

(13) $$y = y_2 - y_1.$$

Nous allons maintenant faire voir que chacune des expressions y_1, y_2 satisfait séparément à l'équation (9). En effet, en substituant tour à tour ces valeurs à y dans le premier membre de cette équation, on obtiendra évidemment deux valeurs de la forme

$$e^{\alpha(m+x)}\left[g_0 + \frac{g_1}{m+x} + \frac{g_2}{(m+x)^2} + \dots\right],$$
$$e^{\beta(m+x)}\left[h_0 + \frac{h_1}{m+x} + \frac{h_2}{(m+x)^2} + \dots\right],$$

les quantités entre parenthèses étant composées d'un nombre fini de termes. La différence de ces valeurs devant satisfaire à l'équation, on devra avoir, quel que soit x,

$$e^{\beta(m+x)}\left(h_0 + \frac{h_1}{m+x} + \dots\right) - e^{\alpha(m+x)}\left(g_0 + \frac{g_1}{m+x} + \dots\right) = 0,$$

d'où l'on tire

$$e^{(\beta-\alpha)(m+x)} = \frac{g_0 + \dfrac{g_1}{m+x} + \dots}{h_0 + \dfrac{h_1}{m+x} + \dots}.$$

Or, chacun des termes de la fraction du second membre étant un développement fini, il faudrait qu'une exponentielle fût égale, quel que fût x, à une fonction rationnelle finie, ce qui est impossible, à moins que les deux termes de la fraction ne s'évanouissent séparément. Donc chacune des expressions y_1, y_2 vérifie séparément l'équation (9).

Donc l'intégrale générale de l'équation (9) sera

(14) $$y = C_1 y_1 + C_2 y_2,$$

C_1, C_2 étant des constantes arbitraires.

916. Si A et B sont *réels, positifs et non entiers*, ou s'ils sont des *nombres complexes à partie réelle positive*, l'équation (11)

donnera seulement une intégrale particulière de (9). Pour trouver une seconde intégrale particulière, posons

$$y = (m+x)^{\lambda} z.$$

L'équation (9) deviendra, en supprimant le facteur $(m+x)^{\lambda-2}$,

$$\begin{aligned}[\lambda(A+B+\lambda-1) - (A\beta + B\alpha + \lambda\alpha + \lambda\beta)(m+x) + \alpha\beta(m+x)^2]z \\ + (m+x)[A+B+2\lambda-(\alpha+\beta)(m+x)]z' + (m+x)^2 z'' = 0.\end{aligned}$$

Si l'on choisit λ de manière à annuler le terme $\lambda(A+B+\lambda-1)$, on pourra diviser l'équation par $m+x$, ce qui la ramènera au type de l'équation (1). En négligeant la solution $\lambda = 0$, qui ramènerait l'équation (9), nous prendrons

$$\lambda = 1 - A - B,$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}[-\alpha(1-A) - \beta(1-B) + \alpha\beta(m+x)]z \\ + [2 - A - B - (\alpha+\beta)(m+x)]z' + (m+x)z'' = 0,\end{aligned}$$

équation qui ne diffère de (9) que par le changement de

$$y,\quad A,\quad B$$

en

$$z,\quad 1-B,\quad 1-A,$$

et qui aura, par conséquent, pour intégrale, *si* $1-B$ *et* $1-A$ *sont des nombres positifs*,

$$z = \int_{\alpha}^{\beta} e^{u(m+x)}(u-\alpha)^{-B}(u-\beta)^{-A}\,du.$$

On aura, dans ce cas, pour seconde intégrale particulière de l'équation (9),

$$(15)\qquad y = (m+x)^{1-A-B}\int_{\alpha}^{\beta} e^{u(m+x)}(u-\alpha)^{-B}(u-\beta)^{-A}\,du.$$

917. L'intégration pourra s'effectuer sous forme finie *si les deux nombres* A *et* B *sont réels, entiers et négatifs,* l'un des deux pouvant même être *nul.*

En faisant, en effet, la transformation précédente, et posant

$$\chi(u) = (u-\alpha)^{-B}(u-\beta)^{-A},$$

on trouvera, en raisonnant comme au numéro 915,

$$y = C_1 e^{\alpha x}(m+x)^{1-A-B}\left[\frac{Z(\alpha)}{m+x} - \frac{Z'(\alpha)}{(m+x)^2} + \dots\right]$$
$$+ C_2 e^{\beta x}(m+x)^{1-A-B}\left[\frac{Z(\beta)}{m+x} - \frac{Z'(\beta)}{(m+x)^2} + \dots\right].$$

918. *Si* A *et* B *sont positifs et moindres que l'unité,* ou du moins *si leurs parties réelles satisfont à cette double condition,* les deux intégrales particulières (11) et (15) auront lieu à la fois, et, par suite, on aura l'intégrale générale en ajoutant leurs produits par des constantes arbitraires.

Il y aurait seulement exception *dans le cas où l'on trouverait* $A + B = 1$, ce qui, si A et B ont des valeurs complexes, exigerait que les parties réelles de ces deux nombres fussent égales chacune à $\frac{1}{2}$. Dans ce cas, les deux intégrales particulières (11) et (15) se confondraient en une seule.

Posons, pour abréger, $A + B = K$,

$$U = e^{mu}(u-\alpha)^{A-1}(u-\beta)^{B-1}, \quad V = (m+x)(u-\alpha)(u-\beta);$$

les intégrales (11) et (15) deviendront alors

$$y_1 = \int_\alpha^\beta e^{ux}\,U\,du, \quad y_2 = \int_\alpha^\beta e^{ux}\,UV^{1-K}\,du.$$

Si y_1, y_2 sont des intégrales de (9), $\dfrac{y_2 - y_1}{1-K}$ sera aussi une intégrale particulière, de sorte que l'on pourra remplacer la valeur de y_2 par la suivante :

$$y_2 = \int_\alpha^\beta e^{ux}\,U\,\frac{V^{1-K} - 1}{1-K}\,du.$$

Si l'on fait tendre $1 - K$ vers zéro, le rapport $\dfrac{V^{1-K} - 1}{1-K}$ aura pour limite $\log V$. Donc, dans le cas de $A + B = 1$, la seconde intégrale particulière deviendra

$$y_2 = \int_\alpha^\beta e^{ux}\,U\log V\,du$$
$$= \int_\alpha^\beta e^{u(m+x)}(u-\alpha)^{A-1}(u-\beta)^{B-1}\log[(m+x)(u-\alpha)(u-\beta)]\,du.$$

On vérifierait aisément que cette nouvelle intégrale satisfait encore à l'équation différentielle et qu'elle est, comme l'intégrale (11), développable suivant les puissances de $m+x$ en une série convergente pour toute valeur de x.

919. Reprenons l'équation (9), et 1° substituons-y pour y la valeur

$$y = e^{\alpha x} z; \tag{16}$$

2° différentions l'équation transformée

$$A(\alpha-\beta)z + [A + B + (\alpha-\beta)(m+x)]z' + (m+x)z'' = 0$$

a fois par rapport à x, et posons

$$z^{(a)} = e^{-\alpha x}\eta. \tag{17}$$

L'équation deviendra

$$\left\{\begin{aligned}&[-(A+a)B - B\alpha + \alpha\beta(m+x)]\eta\\&\qquad + [A + a + B - (\alpha+\beta)(m+x)]\eta' + (m+x)\eta'' = 0,\end{aligned}\right. \tag{18}$$

ce qui ne diffère de l'équation (9) que par le changement de A, y en $A+a$, η.

Or des relations (16) et (17) on tire

$$\eta = e^{\alpha x} D_x^a (e^{-\alpha x} y). \tag{19}$$

Donc les deux équations de même forme (9) et (18), qui ne diffèrent que par le changement de A en $A+a$, auront pour intégrales l'une y, l'autre $e^{\alpha x} D_x^a (e^{-\alpha x} y)$.

Si l'on pose de même

$$\eta = e^{\beta x}\zeta, \quad \zeta^{(b)} = e^{-\beta x} Y,$$

on verra que l'équation en Y différera de l'équation en η par le changement de B en $B+b$, et qu'elle aura pour intégrale

$$Y = e^{\beta x} D_x^b (e^{-\beta x}\eta).$$

Donc, si l'on augmente, dans (9), A de a, B de b, a et b étant deux nombres entiers et positifs, l'intégrale Y de l'équation obte-

une sera liée à y par la relation

$$(20)\qquad \mathrm{Y} = e^{\beta x}\mathrm{D}_x^b\left[e^{(\alpha-\beta)x}\mathrm{D}_x^a(e^{-\alpha x}y)\right].$$

Or, nous avons trouvé [918] l'intégrale de l'équation (9) pour le cas où A et B (ou leurs parties réelles) satisfont aux inégalités

$$0 < \mathrm{A} < 1, \quad 0 < \mathrm{B} < 1.$$

Si, au lieu de cela, A et B (ou leurs parties réelles) ont des valeurs positives non entières quelconques, on pourra, en les diminuant des plus grands entiers a et b qu'ils renferment, les ramener entre les limites zéro et 1. En intégrant l'équation correspondante à $\mathrm{A}' = \mathrm{A} - a$, $\mathrm{B}' = \mathrm{B} - b$, on en déduira ensuite, par la formule (20), l'intégrale générale Y de l'équation proposée.

920. Si l'on pose maintenant, comme au n° 916,

$$y = (m+x)^{1-\mathrm{A}-\mathrm{B}}z,$$

l'équation en z obtenue différant de (9) par le changement de A et B en $1-\mathrm{B}$ et $1-\mathrm{A}$, ces dernières quantités (ou leurs parties réelles) seront positives si A et B (ou leurs parties réelles) sont négatives. Or, d'après ce que nous venons de voir, nous savons intégrer la nouvelle équation dans tous les cas, et, connaissant z, on en déduira immédiatement y. Donc nous savons intégrer l'équation (9) *pour toutes les valeurs négatives de* A *et de* B (ou de leurs parties réelles).

921. Si les nombres A et B sont fractionnaires et de signes contraires, ils devront être réels, sans quoi ils seraient deux quantités complexes conjuguées, dont les parties réelles auraient nécessairement le même signe. Soient, par exemple, A négatif, B positif, et posons

$$\mathrm{B} = b + \mathrm{B}',$$

b étant un entier positif, et B' une fraction positive et < 1.

Considérons maintenant l'équation

$$(21)\qquad \left\{\begin{aligned} &[-\mathrm{A}\beta - (\mathrm{B}'-1)\alpha + \alpha\beta(m+x)]z \\ &\quad + [\mathrm{A} + \mathrm{B}' - 1 - (\alpha+\beta)(m+x)]z' + (m+x)z'' = 0, \end{aligned}\right.$$

qui diffère de l'équation (9) par le changement de y et B en z et $B' - 1 = B - (b+1)$, ce dernier nombre étant négatif et numériquement moindre que l'unité. Cette équation, où A et $B'-1$ sont négatifs, pourra s'intégrer, d'après le numéro précédent.

Connaissant z, on aura aisément y. En faisant, dans (21), $z = e^{\beta x}\zeta$, différentiant $b+1$ fois, et posant enfin $\zeta^{(b+1)} = e^{-\beta x}y$, on en tirera

$$y = e^{\beta x} D_x^{b+1}(e^{-\beta x} z).$$

922. Si A et B sont de la forme $p \pm iq$, p étant *positif*, on appliquera directement la méthode de Laplace à l'équation (9). Si p est *négatif*, on fera, comme aux nos 916 et 920,

$$y = (m+x)^{1-A-B} z,$$

et l'on appliquera la méthode de Laplace à l'équation transformée.

Dans les deux cas, on obtiendra une seule intégrale particulière. On en trouvera ensuite une seconde en appliquant la méthode de la variation des constantes arbitraires [882].

923. II. Passons au second cas, dans lequel

$$\frac{P}{Q} = m + \frac{A}{(u-\alpha)^2} + \frac{B}{u-\alpha}.$$

On aura alors

$$\int \frac{P}{Q} du = mu - \frac{A}{u-\alpha} + B \log(u-\alpha),$$

$$U = (u-\alpha)^{B-2} e^{mu - \frac{A}{u-\alpha}}.$$

L'équation pour la détermination des limites serait

$$(u-\alpha)^B e^{u(m+x) - \frac{A}{x-\alpha}} = 0.$$

Mais cette équation ne donne pas deux valeurs de u ; on n'obtient donc pas ainsi les deux limites de l'intégrale

$$y = \int e^{u(m+x) - \frac{A}{x-\alpha}} (u-\alpha)^{B-2} du,$$

et il faut recourir à un autre procédé.

Introduisons d'abord dans l'équation (1), au lieu des constantes $a_0, b_0, a_1, \ldots,$ les constantes m, A, B, α; on trouve facilement que l'équation (1) devient ainsi

$$(22)\quad [A - B\alpha + \alpha^2(m+x)]y + [B - 2\alpha(m+x)]y' + (m+x)y'' = 0,$$

d'où, en posant $y = e^{\alpha x} z$,

$$(23)\qquad Az + Bz' + (m+x)z'' = 0.$$

Si l'on y fait maintenant

$$m + x = t^2,$$

il viendra enfin

$$(24)\qquad 4Atz + (2B-1)\frac{dz}{dt} + t\frac{d^2 z}{dt^2} = 0,$$

qui est un cas particulier de l'équation (9), où l'on a changé

$$m,\quad A,\qquad B,\qquad \alpha,\qquad \beta,\qquad x,\ y$$

respectivement en

$$0,\quad B - \frac{1}{2},\quad B - \frac{1}{2},\quad -2\sqrt{-A},\quad +2\sqrt{-A},\quad t,\quad z.$$

Nous savons donc intégrer complétement l'équation (24), et de là nous déduirons l'intégrale générale de (22), au moyen des relations

$$t^2 = m + x,\quad y = e^{\alpha x} z.$$

924. Dans le cas particulier de $A = 0$, l'équation (23) devient

$$Bz' + (m+x)z'' = 0,$$

d'où

$$z = C_1 + C_2 \int \frac{dx}{(m+x)^B};$$

on conclut de là que l'intégrale générale de l'équation

$$[-B\alpha + \alpha^2(m+x)]y + [B - 2\alpha(m+x)]y' + (m+x)y'' = 0$$

ou

$$(a_0 + b_0 x)y + (a_1 + b_1 x)y' + \left(a_2 + \frac{b_1^2 x}{4 b_0}\right)y'' = 0$$

sera

$$y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\alpha x}\int \frac{dx}{(m+x)^B}.$$

925. III. Dans le cas de $b_2 = 0$, on a

$$\frac{P}{Q} = \frac{a_0 + a_1 u + a_2 u^2}{b_0 + b_1 u} = m + nu + \frac{A}{u - \alpha},$$

et l'équation (1) devient

(25) $$[A - \alpha(m + x)]y - (m + x - n\alpha)y' + ny'' = 0.$$

On a ici

$$\int \frac{P}{Q}\,du = mu + \frac{n}{2}u^2 + A\log(u - \alpha),$$

$$U = (u - \alpha)^{A-1} e^{mu + \frac{n}{2}u^2},$$

d'où

$$y = \int_{u_1}^{u_2} (u - \alpha)^{A-1} e^{u(m+x) + \frac{n}{2}u^2}\,du,$$

u_1, u_2 étant les racines de l'équation

(26) $$(u - \alpha)^A e^{u(m+x) + \frac{n}{2}u^2} = 0.$$

Pour avoir l'intégrale générale de l'équation (25), il faut discuter l'équation (26).

1° Considérons le cas où l'on a

$$A > 0, \quad n < 0;$$

les racines de l'équation (26) seront

$$u = \alpha, \quad +\infty, \quad -\infty;$$

l'intégrale générale de l'équation (25) sera donc, dans ce cas,

$$y = C_1 \int_{\alpha}^{\infty} (u - \alpha)^{A-1} e^{u(m+x) + \frac{n}{2}u^2}\,du$$
$$+ C_2 \int_{\alpha}^{-\infty} (u - \alpha)^{A-1} e^{u(m+x) + \frac{n}{2}u^2}\,du,$$

ou, en posant dans la première intégrale $u - \alpha = v$ et dans la seconde $u - \alpha = -v$,

$$y = e^{\alpha x} \int_0^{\infty} v^{A-1} e^{\frac{n}{2}v^2} \left[C_1 e^{v(m+x+n\alpha)} + C_2 e^{-v(m+x+n\alpha)}\right] dv.$$

Si λ est *un entier positif*, on pourra écrire cette intégrale sous la forme

$$y = e^{\alpha x} D_x^{\lambda-1} \int_0^\infty e^{\frac{n}{2}v^2} \left[C_1 e^{iv(m+x+n\alpha)} + C_2 e^{-iv(m+x+n\alpha)}\right] dv.$$

2° *Si λ et n sont l'un et l'autre positifs*, les racines de l'équation (26) seront

$$u = \alpha, \quad +i\infty, \quad -i\infty,$$

et, en posant dans la première intégrale $u - \alpha = iv$ et dans la seconde $u - \alpha = -iv$, on trouvera de même

$$y = e^{\alpha x} \int_0^\infty v^{\lambda-1} e^{-\frac{n}{2}v^2} \left[C_1 e^{iv(m+x+n\alpha)} + C_2 e^{-iv(m+x+n\alpha)}\right] dv.$$

Si λ est *un entier positif*, cette intégrale est susceptible de la même transformation que dans le cas précédent.

3° *Si λ et n sont négatifs*, les racines de l'équation (26) seront $u = \pm\infty$, et la formule de Laplace devient

$$y = \int_{-\infty}^{+\infty} (u - \alpha)^{\lambda-1} e^{u(m+x)+\frac{n}{2}u^2} du.$$

Mais ici elle est illusoire, la fonction sous le signe $\int$ passant par l'infini dans l'intervalle des limites. Il en sera de même

4° *Si λ est nul ou négatif, n étant positif.*

Donc, dans le cas de $\lambda < 0$, l'intégration de l'équation (25) ne peut s'effectuer par la méthode de Laplace. Voici la méthode que lui substitue M. Spitzer.

926. En posant

$$y = e^{\alpha x} z,$$

l'équation (25) devient

$$\lambda z + (m + x + n\alpha) z' + n z'' = 0,$$

ou, en faisant

$$m + x + n\alpha = kt,$$

$$\lambda k^2 z + k^2 t \frac{dz}{dt} + n \frac{d^2 z}{dt^2} = 0,$$

ou enfin, en prenant $k^2 = -n$,

$$(27)\qquad Az + t\frac{dz}{dt} - \frac{d^2 z}{dt^2} = 0,$$

où A est supposé toujours réel et négatif. En représentant ce nombre par — a, l'équation à intégrer sera

$$(28)\qquad -az + t\frac{dz}{dt} - \frac{d^2 z}{dt^2} = 0.$$

Considérons maintenant deux cas.

1° $A = -a$ est *négatif et entier*. Différentions alors a fois l'équation (27), ce qui donnera

$$D_t^{a+2} z = t D_t^{a+1} z,$$

ou, en posant $D_t^{a-1} z = \zeta$,

$$\frac{d\zeta}{dt} = t\zeta,$$

équation à laquelle on peut appliquer la méthode de Laplace.

En posant donc

$$\zeta = \int_{u_1}^{u_2} e^{ut}\,U\,du,$$

l'équation devient, en opérant comme au n° 912,

$$[e^{ut}U]_{u_1}^{u_2} - \int_{u_1}^{u_2} e^{ut}\left(uU + \frac{dU}{du}\right)du.$$

On satisfait à cette équation en déterminant d'abord U par l'équation

$$uU + \frac{dU}{du} = 0, \quad \text{d'où} \quad U = e^{-\frac{u^2}{2}},$$

puis choisissant les limites de manière que $e^{ut}U$ s'évanouisse, ce qui aura lieu pour $u = \pm\infty$. On aura donc, pour la valeur de $\zeta = D_t^{a+1} z$,

$$\frac{d^{a+1} z}{dt^{a+1}} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ut - \frac{u^2}{2}}\,du.$$

En intégrant a + 1 fois les deux membres de cette équation par rapport à t, les intégrations du second membre étant effectuées entre

les limites zéro et t, il vient [470]

$$z = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{u^{a+1}} \left(e^{ut} - 1 - \frac{ut}{1} - \frac{u^2 t^2}{2!} - \ldots - \frac{u^a t^a}{a!} \right) \\ + U_1 + U_2 t + \ldots + U_{a+1} t^a \end{array} \right\},$$

$U_1, U_2, \ldots, U_a$ étant des fonctions arbitraires de u.

Il faut maintenant restreindre la généralité de cette équation en déterminant les arbitraires superflues par la condition que cette valeur satisfasse à l'équation (27). On trouve ainsi les équations

$$\begin{aligned} 1.2\, U_3 &= -a U_1, \\ 2.3\, U_4 &= -(a-1) U_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ (a-1) a U_{a+1} &= -2 U_{a-1}, \\ U_a &= -\frac{1}{(a-1)!}, \end{aligned}$$

qui déterminent $U_1, U_2, \ldots, U_a$ en fonction de la seule arbitraire U_{a+1}.

La valeur de z est alors exprimée par une intégrale dans laquelle

$$C_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} U_{a+1}\, du$$

joue le rôle de constante arbitraire. En multipliant par une autre constante arbitraire C_1, on aura l'intégrale générale de l'équation (28) sous la forme

$$z = C_1 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} \varphi(u, t)\, du + C_2 \chi(t),$$

φ et χ étant deux fonctions déterminées.

Ainsi l'équation

$$z - t \frac{dz}{dt} + \frac{d^2 z}{dt^2} = 0,$$

pour laquelle $-A = 1$, admettra l'intégrale

$$z = C_1 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} \left(\frac{e^{ut} - 1 - ut}{u^2} - 1 \right) du + C_2 t.$$

On voit que, dans le cas de A *entier et négatif*, l'équation (27)

admet une intégrale particulière $\chi(t)$, qui est un polynôme entier, et qu'il sera dès lors plus simple d'obtenir par la méthode des coefficients indéterminés. Ensuite on trouverait l'autre intégrale particulière par la variation des constantes arbitraires. Nous savons en effet [882] que, si y_1 est une intégrale particulière de l'équation

$$X_0 y + X_1 y' + X_2 y'' = 0,$$

on aura pour seconde intégrale particulière [881]

$$y_2 = \frac{1}{y_1} e^{-\int \frac{X_1}{X_2} dx}.$$

927. Si maintenant Λ est *négatif et non entier,* soit a un entier positif plus grand que la valeur numérique de Λ, et différentions a fois l'équation (27), ce qui donne

$$(\Lambda + a) \frac{d^a z}{dt^a} + t \frac{d^{a+1} z}{dt^{a+1}} - \frac{d^{a+2} z}{dt^{a+2}} = 0.$$

$\Lambda + a$ étant > 0; on aura alors une équation analogue à l'équation (25) du n° 925, au changement près de

$$m, \quad n, \quad \Lambda, \quad \alpha, \quad y, \quad x$$

en

$$0, \quad -1, \quad \Lambda + a, \quad 0, \quad \frac{d^a z}{dt^a}, \quad t,$$

d'où l'on tire

$$\frac{d^a z}{dt^a} = C_1 \int_0^{+\infty} u^{\Lambda + a - 1} e^{ut - \frac{u^2}{2}} du + C_2 \int_0^{-\infty} u^{\Lambda + a - 1} e^{ut - \frac{u^2}{2}} du.$$

En intégrant a fois par rapport à t chacune de ces deux intégrales elles deviendront

$$\int_0^{\pm\infty} u^{\Lambda - 1} e^{-\frac{u^2}{2}} \left[e^{ut} - 1 - ut - \ldots - \frac{u^{a-1} t^{a-1}}{(a-1)!} + U_1 + U_2 t + \ldots + U_a t^{a-1} \right] du,$$

et l'on déterminera les fonctions arbitraires de u comme on l'a fait au n° 926.

928. IV. Soit enfin

$$\frac{P}{Q} = a_0 + a_1 u + a_2 u^2,$$

ce qui répond à l'équation

$$(29)\qquad (a_0 + x)y + a_1 y' + a_2 y'' = 0.$$

On trouvera

$$\int \frac{P}{Q}\,du = a_0 u + \frac{a_1}{2}u^2 + \frac{a^2}{3}u^3$$

d'où

$$U = e^{a_0 u + \frac{a_1}{2}u^2 + \frac{a_2}{3}u^3},$$

et en faisant, pour abréger,

$$(a_0 + x)u + \frac{a_1}{2}u^2 + \frac{a_2}{3}u^3 = \psi(u),$$

on a

$$y = \int_{u_1}^{u_2} e^{\psi(u)}\,du.$$

Les limites u_1, u_2 sont déterminées par l'équation $U = 0$, qui est vérifiée pour

$$a_2 u^3 = -\infty.$$

Si donc on désigne par ρ_1, ρ_2, ρ_3 les trois racines cubiques de $-\frac{1}{a_2}$, les racines de $U = 0$ seront $\rho_1\infty$, $\rho_2\infty$, $\rho_3\infty$. On tire de là

$$y = C_1\int_0^{\rho_1\infty} e^{\psi(u)}\,du + C_2\int_0^{\rho_2\infty} e^{\psi(u)}\,du + C_3\int_0^{\rho_3\infty} e^{\psi(u)}\,du.$$

On peut facilement vérifier que cette valeur satisfait à l'équation (29); en effet, le premier membre devient, par la substitution de cette valeur,

$$C_1\int_0^{\rho_1\infty} \psi'(u)e^{\psi(u)}\,du + C_2\int_0^{\rho_2\infty} \psi'(u)e^{\psi(u)}\,du + C_3\int_0^{\rho_3\infty} \psi'(u)e^{\psi(u)}\,du.$$

Or on a

$$\int \psi'(u)e^{\psi(u)}\,du = e^{\psi(u)},$$

d'où

$$(a_0 + x)y + a_1 y' + a_2 y'' = C_1\left[e^{\psi(u)}\right]_0^{\rho_1\infty} + C_2\left[e^{\psi(u)}\right]_0^{\rho_2\infty} + C_3\left[e^{\psi(u)}\right]_0^{\rho_3\infty},$$

expression qui s'annule, pourvu que les trois constantes arbitraires soient assujetties à la condition

$$C_1 + C_2 + C_3 = 0.$$

Si l'on pose respectivement, dans les trois intégrales,

$$u = \rho_1 v,\ \rho_2 v,\ \rho_3 v,$$

la valeur de y prendra la forme plus simple

$$(30)\qquad y = \int_0^\infty e^{-\frac{v^3}{3}} \left\{ \begin{array}{l} C_1\rho_1 e^{(a_0+x)\rho_1 v + \frac{a_1}{2}\rho_1^2 v^2} \\ + C_2\rho_2 e^{(a_0+x)\rho_2 v + \frac{a_1}{2}\rho_2^2 v^2} \\ + C_3\rho_3 e^{(a_0+x)\rho_3 v + \frac{a_1}{2}\rho_3^2 v^2} \end{array} \right\} du,$$

toujours avec la condition $C_1 + C_2 + C_3 = 0$.

929. On peut encore procéder de la manière suivante.

Si l'on substitue dans (29) la valeur

$$y = e^{\lambda x} z,$$

il viendra

$$(a_0 + a_1\lambda + \lambda^2 + x)z + (a_1 + 2a_2\lambda)z' + a_2 z'' = 0,$$

équation qui se simplifie, si l'on pose

$$a_1 + 2a_2\lambda = 0,$$

et si l'on fait, de plus,

$$a_0 + a_1\lambda + \lambda^2 + x = -t\sqrt[3]{a_2}.$$

On obtiendra ainsi l'équation

$$tz - \frac{d^2 z}{dt^2} = 0,$$

qui aura pour intégrale une expression analogue à l'expression (30), où l'on aurait posé $a_0 = 0$, $a_1 = 0$, $a_2 = -1$, savoir

$$z = \int_0^\infty e^{-\frac{u^3}{3}} (C_1\rho_1 e^{\rho_1 ut} + C_2\rho_2 e^{\rho_2 ut} + C_3\rho_3 e^{\rho_3 ut})\, du,$$

avec les conditions

$$\rho^3 = 1, \quad C_1 + C_2 + C_3 = 0.$$

930. *Équation de Riccati.* — Cette équation est la suivante :

$$z' + az^2 + bx^m = 0.$$

En posant

$$z = -\frac{b}{a}\frac{y'}{y},$$

l'équation se ramène à la forme linéaire

(31) $$x^m y - y'' = 0.$$

Cette équation s'intègre immédiatement par les méthodes du paragraphe précédent, si l'on suppose à m une des valeurs zéro ou -2.

Pour toute autre valeur de m, si l'on pose

$$x = t^n,$$

l'équation deviendra

$$-n^2 t^{mn+2n-1} y + (1-n)\frac{dy}{dt} + t\frac{d^2y}{dt^2} = 0,$$

et celle-ci se simplifiera :

1° Si l'on pose $mn + 2n - 1 = 0$, d'où $n = \frac{1}{m+2}$,

$$-\frac{1}{(m+2)^2} y + \frac{m+1}{m+2}\frac{dy}{dt} + t\frac{d^2y}{dt^2} = 0,$$

équation qui a pour intégrale, si $\frac{m}{2m+4}$ est *entier et positif*,

$$y = D_t^{\frac{m}{2m+4}}\left(C_1 e^{\frac{2\sqrt{t}}{m+2}} + C_2 e^{-\frac{2\sqrt{t}}{m+2}}\right) \text{ [1]},$$

---

[1] En effet, en posant $\frac{m}{2m+4} = \mu$, l'équation devient

(A) $$-\left(\mu - \frac{1}{2}\right)^2 y + \left(\mu + \frac{1}{2}\right) y' + t y'' = 0.$$

Or, si l'on différentie μ fois l'équation

(B) $$-\left(\mu - \frac{1}{2}\right)^2 z + \frac{1}{2} z' + t z'' = 0,$$

on obtiendra une équation en $z^{(\mu)}$ qui coïncidera avec l'équation (A). Si l'on prend maintenant $\sqrt{t} = s$ pour variable indépendante, l'équation (B) se réduira à la forme

$$-\left(\mu - \frac{1}{2}\right)^2 z + \frac{d^2 z}{ds^2} = 0, \quad \text{etc.}$$

On traiterait d'une manière analogue le cas suivant.

et si $\frac{m+4}{2m+4}$ est *entier et positif,*

$$y = t^{\frac{1}{m+2}} D_t^{\frac{m+4}{2m+4}} \left(C_1 e^{\frac{2\sqrt{t}}{m+2}} + C_2 e^{-\frac{2\sqrt{t}}{m+2}} \right).$$

2° Si l'on pose $mn + 2n - 1 = 1$, d'où $n = \frac{2}{m+2}$,

$$(32) \qquad -\frac{4}{(m+2)^2} ty + \frac{m}{m+2}\frac{dy}{dt} + t\frac{d^2y}{dt^2},$$

équation qui rentre dans l'équation (9), en remplaçant

$$m, \quad A, \quad B, \quad \alpha, \quad \beta, \quad x$$

par

$$0, \quad \frac{m}{2m+4}, \quad \frac{m}{2m+4}, \quad -\frac{2}{m+2}, \quad +\frac{2}{2m+2}, \quad t.$$

Nous avons intégré cette équation dans tous les cas possibles; nous pouvons donc intégrer dans tous les cas l'équation de Riccati.

931. Signalons quelques exemples particuliers.

I. Si m est un nombre positif quelconque, A et B seront *positifs et moindres que l'unité*. L'équation (32) se trouvera alors dans le cas du n° 918, et l'on pourra écrire immédiatement son intégrale générale. En remettant pour t sa valeur $x^{\frac{m}{2}+1}$, et posant $u = \frac{2v}{m+2}$, l'expression de cette intégrale deviendra, en posant $\frac{m}{2}+1 = \mu$,

$$y = C_1 \int_{-1}^{+1} e^{\frac{v}{\mu}x^\mu} (1-v^2)^{-\frac{\mu+1}{2\mu}} dv + C_2 x \int_{-1}^{+1} e^{\frac{v}{\mu}x^\mu} (1-v^2)^{-\frac{\mu-1}{2\mu}} dv.$$

En particulier, l'équation

$$y'' = xy$$

donne

$$y = C_1 \int_{-1}^{+1} e^{\frac{2v}{3}x^{\frac{3}{2}}} (1-v^2)^{-\frac{5}{6}} dv + C_2 x \int_{-1}^{+1} e^{\frac{2v}{3}x^{\frac{3}{2}}} (1-v)^{-\frac{1}{6}} dv.$$

II. L'équation

$$xy'' = y$$

devient, en posant $x = t^2$,

$$-4ty - \frac{dy}{dt} + t\frac{d^2y}{dt^2} = 0.$$

Comme on a pour cette équation $A = B = -\frac{1}{2}$, on posera [920] $y = t^2 z$, d'où l'équation

$$-4tz + 3\frac{dz}{dt} + t\frac{d^2 z}{dt^2} = 0,$$

pour laquelle $A = B = \frac{3}{2}$, et que l'on ramènera [919] à l'équation

$$-4t\zeta + \frac{d\zeta}{dt} + t\frac{d^2\zeta}{dt^2} = 0.$$

On en tirera

$$\zeta = C_1 \int_{-2}^{+2} e^{ut}(u^2 - 4)^{-\frac{1}{2}}\, du + C_2 \int_{-2}^{+2} e^{ut}(u^2 - 4)^{-\frac{1}{2}} \log[t(u^2 - 4)]\, du,$$

puis

$$z = \zeta'' - 4\zeta,$$

et enfin

$$y = C_1 x \int_{-2}^{+2} e^{u\sqrt{x}} \sqrt{u^2 - 4}\, du$$

$$+ C_2 \int_{-2}^{+2} e^{u\sqrt{x}} \sqrt{u^2 - 4} \left\{ x \log[(u^2 - 4)\sqrt{x}] + \frac{2u\sqrt{x} - 1}{u^2 - 4} \right\} du.$$

III. L'équation

$$xy - y^{(n)} = 0$$

s'intègre par la méthode de Laplace, et la valeur générale de y est

$$y = \int_0^\infty e^{-\frac{u^{n+1}}{n+1}} (C_1 \rho_1 e^{\rho_1 ux} + \ldots + C_{n+1} \rho_{n+1} e^{\rho_{n+1} ux})\, du,$$

$\rho_1, \ldots, \rho_{n+1}$ étant les racines de l'équation $\rho^{n+1} = 1$, et les constantes $C_1, \ldots, C_{n+1}$ étant assujetties à la condition

$$C_1 + C_2 + \ldots + C_{n+1} = 0.$$

FIN DU TOME DEUXIÈME.

TABLE DES MATIÈRES.

LIVRE TROISIÈME.

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DU CALCUL INFINITÉSIMAL.

CHAPITRE PREMIER.

Applications du Calcul différentiel à la Géométrie plane.

CHAPITRE II.

Applications du Calcul différentiel à la Géométrie à trois dimensions.

CHAPITRE III.

Applications de l'intégration au calcul des aires, des volumes, des centres de gravité, des moments d'inertie, etc.

LIVRE QUATRIÈME.

THÉORIE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

CHAPITRE PREMIER.

Des équations différentielles entre deux variables en général.

CHAPITRE II.

Intégration des équations différentielles du premier ordre entre deux variables.

CHAPITRE III.

Des équations différentielles d'ordre supérieur au premier.

CHAPITRE IV.

Théorie des équations différentielles linéaires entre deux variables.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME DEUXIÈME.

3202 Paris. — Imprimerie de Gauthier-Villars, quai des Augustins, 55.

ERRATA DU TOME DEUXIÈME.

Pages	Lignes	*Au lieu de*	*Lisez*
10	10 en remontant	l'angle des x	l'axe des x
27	11 (au dénom.)	$r^{n-1}\chi'(p)$	$r^{m-1}\chi(p)$
»	3 en remontant	$\dfrac{x \sin \frac{y}{x} - x^2 y}{y \sin \frac{y}{x}}$	$\dfrac{y \sin \frac{y}{r}}{x \sin \frac{y}{x} + 2x^2 y}$
44	14	534	541
48	6 en remontant	$\dfrac{ds^2 d^2 x^2 - dx\,ds\,d^2 s}{ds^2}$	$\dfrac{ds^2 d^2 x^2 - dx\,ds\,d^2 s}{ds^4}$
57	6 en remontant	$h^n \ldots h_2^2$	$h_n \ldots h_n^2$
60	12	$\dfrac{1+y'^2}{y''(1+\varepsilon}$	$\dfrac{y''(1+\varepsilon)}{1+y'^2}$
65	3	[551]	[552]
75	7	582	583
81	5 en remontant	480	481
82	en remontant	(10)	$(1)^2$
83	6 en remontant	$+\dfrac{h^2}{a}$	$+\dfrac{h^2}{2}$
93	2 en remontant	rotation	notation
100	3	604	605
»	7	$dz =$	$z =$
106	16	$\dfrac{\partial f}{dt}$	$\dfrac{\partial f}{\partial t}$
111	15	$+ e^{i\gamma}\quad\tau$	$+ e^{i\gamma} z'\tau$
134	14	$+ bzp$	$+ czp$
137	3 en remontant	$+(2h+h_1)\theta$	$-(2h+h_1)\theta$
148	1 en remontant	(1)	(7)
162	7	$\begin{vmatrix} a & b & c \\ da & db & dc \\ dx & dy & dz \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ d\alpha & d\beta & d\gamma \\ dx & dy & dz \end{vmatrix}$
165	6 en remontant	R =	= R { Aligner le signe = avec celui qui est trois lignes plus haut.
171	6	681	680

Pages	Lignes	*Au lieu de*	*Lisez*
171	3 en remontant	679	680
182	15	682	690
184	8 en remontant	686	685
»	1 en remontant	$-2(Abx\,dx$	$+2(Abx\,dx$
185	1	686	6 5
»	2	(Aby'^2+Ba)	(Bay'^2+Ab)
»	4	$[(a-c)y'^2+(b-c)]$	$[(b-c)y'^2+(a-c)]$
193	2 en remontant	681	680
194	1	[681 et 683]	[680 et 682]
198	2 en remontant	$Z_{,}x'+$	$X_{,}x'+$
215	3 en remontant	$-\frac{a^3}{ac}R$	$-\frac{a^2}{ac}R$
218	7 en remontant	$a^3\,dt$	$a^2\,dt$
219	13	$=au^2$	$=a^2u^2$
232	8 en remontant	$=\frac{2}{2}$	$=\frac{1}{2}$
234	2	$=\frac{1}{2}\int\frac{ds^2}{d\tau^2}$	$=\frac{1}{2}\int\frac{ds^2}{d\tau}$
236	5 en remontant	$\sin^2\frac{1}{2}t$	$\cos^2\frac{1}{2}t$
»	2 en remontant	le complément de l'anomalie	l'anomalie
240	6	$+\frac{h}{z}b+\frac{h^2}{z^2}b$	$+\frac{z}{h}b+\frac{z^2}{h^2}b$
246	3 en remontant	des zx	des zy
257	9	$=\frac{1}{2a}$	$=\frac{1}{2a^2}$
»	9	$\frac{y^5}{10a}$	$\frac{y^5}{10a^2}$
312	2	$=C''\frac{y}{x}$	$=C''\frac{y'}{x}$
»	12	x^2y^2	a^2y^2
334	3 et 1 en remontant	a^2	a
339	5 en remontant	$u^3e^{-3x}\,dx$	$u^3e^{-3x}x\,dx$
345	10 en rem. (au dén.)	$x\sqrt{1-y^2}+\sqrt{1-x^2}$	$x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}$
358	8 en remontant	*après* est donc *ajouter :*	l'unité divisée par
364	4	$+x^{n+2}\psi(t)\,dt$	$-x^{n+2}\psi(t)\,dt$
»	6	$+x^{n-m-2}$	$-x^{n-m-2}$
»	9 en remontant	$-2ab\log t$	$-6ab\log t$
372	14	689	688
387	9	$\sqrt{1+y^2}$	$\sqrt{1+y'^2}$

Pages	Lignes	*Au lieu de*	*Lisez*
389	1	$\sin p$	$y = r\sin p$
401	15	$+ 2y'^{2}$	$+ 2yy'^{2}$
404	10	$\frac{y}{\sqrt{1+y'^2}}$	$\frac{a^2 y}{\sqrt{1+y'^2}}$
410	4	$\left(\frac{dx}{y}\right)^2$	$\left(\frac{dx}{x}\right)^2$
415	12 en remontant	$+ C_1 y_2$	$+ C_2 y_2$
419	6	$n(n-1)\ldots D_x^n y_1$	$n(n-1)\ldots 1 . y_1$
420	1	$u =$	y
429	6 en remontant	de z	de t
430	12	5	8
431	3	(4)	(7)
»	6	$(C'\cos px + C''\sin px)$	$(C'\cos qx + C''\sin qx)$
434	8	r^{n-3}	r_1^{n-3}
442	2 en remontant	A_{p+1}	A_{p+2}
443	5	$x^{\frac{1}{2}} a_1 A_1$	$1^{\frac{1}{2}} a_1 A_1$
445	10	$\frac{a}{\cos^2 ax} t$	$\frac{a}{\cos ax} t$
448	avant-dernière ligne du déterminant	$z_1^{(k-1)} z_2^{(k-1)} \ldots z_k^{(k-1)}$	$z_1^{(k-2)} z_2^{(k-2)} \ldots z_k^{(k-2)}$
450	6 en remontant	(10)	(12)
454	5	$-\int_{u_2}^{u_2}$	$-\int_{u_1}^{u_2}$
459	13	$(A - a)B$	$(A + a)\beta$
»	14	$(\alpha + \beta)(m + x)\eta$	$[(\alpha + \beta)(m + x)]\eta$
465	10	$D_t^{a-1} z$	$D_t^{a+1} z$
469	10 et 14	$+ \lambda^2$	$+ a_2 \lambda^2$
»	14	$-t\sqrt[3]{a_2}$	$t\sqrt[3]{a_2^2}$
470	2	$= -\frac{b}{a}\frac{y'}{y}$	$= \frac{1}{a}\frac{y'}{y}$
»	Ajouter après cette formule les mots :	et remplaçant ensuite x par $(-ab)^{-\frac{1}{m+2}} x$	
471	8	$+\frac{2}{2m+2}$	$+\frac{2}{m+2}$